Никомах из Герасы

Введение в арифметику

От переводчика

Введение в арифметику (Ἀριθμηθικὴ εἰσαγωγῆ), написанное Никомахом из Герасы во II в. н. э., представляет собой пифагорейскую числовую энциклопедию. Традиция такого рода сочинений восходит, по-видимому, к платоновской Древней Академии. Во всяком случае, уже Ксенократу принадлежали сочинения *О числах* и *Теория чисел*, до наших дней не дошедшие, и они вполне могли содержать материал, схожий с тем, который рассматривается у Никомаха. *Изложение математических вещей, полезных при чтении Платона*, написанное Теоном Смирнским приблизительно в то же время, что и *Введение* Никомаха, содержит в своей арифметической части примерно тот же самый материал и изложено в том же стиле, что предполагает наличие каких-то общих источников.

В предисловии к *Введению* (I 1–6) рассматривается деление математических предметов на непрерывные и дискретные, в связи с чем обсуждается четвёрка пифагорейских математических наук – арифметика, геометрия, гармоника, сферика – и значение этих наук для изучения философии. При этом арифметика называется самой старшей наукой, ибо она «предшествует остальным наукам в уме бога-творца как некий космический и образцовый замысел, опираясь на который, как на установление и изначальный образец, создатель вселенной упорядочивает свои материальные творения и приводит их к подобающим целям; а также потому, что по своей природе она является перворождённой, ибо с её уничтожением уничтожаются прочие науки, но сама она не уничтожается вместе с ними» (I 4, 2). Рассматриваемое в арифметике «научное» число объявляется Никомахом божественной парадигмой космической гармонии: «Это число лишь мыслится и оно во всех отношениях нематериально, но всё же оно является действительным и вечно сущим, так что в соответствии с ним, сообразуясь с планом творения, были созданы время, движение, небо, звёзды и всевозможные обращения» (I 6, 1).

Далее Никомах переходит к рассмотрению арифметики абсолютных количеств (I 7–16), которая занимается чётными и нечётными, простыми и составными, избыточными, недостаточными и совершенными числами. Здесь описаны решето Эратосфена для получения простых чисел, а также алгоритм последовательного взаимного вычитания для отыскания наибольшей общей меры двух чисел и приём построения чётных совершенных чисел. В арифметике относительных количеств (I 17–II 5) вводится классификация числовых отношений и описывается весьма примечательный алгоритм разворачивания

ΣΧΟΛΗ 3. 1 (2009)

всех числовых отношений из отношения равенства (см. Щетников 2008a). Затем Никомах переходит к рассмотрению «фигурных чисел» – многоугольных, пирамидальных, плоских и телесных (II 6–20). Завершается *Введение* (II 21–29) обсуждением числовых пропорций: арифметической, гармонической и геометрической, введёнными древними математиками, а также семи других, добавленных к ним позднее (см. Щетников 2008b).

Изложение арифметических фактов во *Введении* лишено доказательств. Число интересует Никомаха как философа-теоретика в качестве упорядоченной основы всего сущего. При этом единое оказывается «началом», «корнем», «семенем» и «матерью» числового множества, разворачиваемого из него по некоторому правилу. Прежде всего, таким образом разворачивается само число-счёт как «поток составленного из единиц количества». Но так же устроены и отдельные виды чисел. Не будет преувеличением сказать, что числами в собственном смысле этого слова для Никомаха являются именно виды чисел с порождающими эти виды математическими правилами.

Другая важная роль арифметики в системе античного платонизма – пропедевтическая. Изучение математических наук традиционно (с опорой на *Государство* и *Послезаконие* Платона) рассматривалось как основной этап философского восхождения от чувственно воспринимаемых вещей, находящихся в непрестанном изменении, к вещам нематериальным, вечным и неизменным, постижимым только в разумном рассуждении. Как говорит Никомах, «эти науки суть лестницы и мосты, которые переносят наши умы от воспринимаемого чувством и мнением к постижимому мыслью и знанием; и от знакомых и привычных нам с детства материальных и телесных вещей – к непривычным и чуждым нашим чувствам, однако их нематериальность и вечность родственны нашим душам и, что ещё важнее, заключённому в них разуму» (I 6, 6).

Изучение арифметики для Никомаха имеет ярко выраженный этический характер. Описывая алгоритм разворачивания всех числовых отношений из отношения равенства и обратного сведения всех неравенств к равенству, Никомах заключает это описание следующим выводом: «Разумная часть души приводит в порядок неразумную часть, её порывы и влечения, связанные с двумя видами неравенства, и посредством размышления подводит её к равенству и тождеству. А для нас из этого уравнивания прямо вытекают так называемые этические добродетели, каковые суть благоразумие, мужество, мягкость, самообладание, выдержка и подобные им качества» (I 23, 4–5).

В античности *Введение в арифметику* не раз комментировали; сохранились комментарии Ямвлиха, Асклепия из Тралл, Иоанна Филопона, известно также о комментариях Сотерика и Герона. Вскоре после смерти Никомаха *Введение* было переведено на латынь Апулеем; этот перевод не сохранился. Боэций перевёл *Введение* на латынь ещё раз и издал его в своей редакции. Перевод Боэция послужил основным источником математических сведений для Кассиодора, Марциана Капеллы, Исидора Севильского и других авторов, и на нём основывался арифметический раздел квадривиума средневековых университетов. Имеется также перевод *Введения* на арабский язык, выполненный Сабитом ибн Коррой (2-я пол. IX в.).

Перевод *Введения* выполнен по изданию: Hoche R., ed. (1866) *Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae libri II* (Lipsiae). При работе использовался также английский перевод D'Ooge M. L., tr. (1926) *Nicomachus of Gerasa. Introduction to Arithmetic* (New York).

А. И. Щетников

КНИГА ПЕРВАЯ

ГЛАВА I

[1] Древние, которые первыми вслед за Пифагором стали исследовать знание, определили философию как любовь к мудрости. Это имя имеет именно такое значение, и до Пифагора мудрым называли всякого, кто был сведущ в каком-либо искусстве или ремесле, – безразлично, был ли он плотником, сапожником или кормчим. Однако Пифагор ограничил это название, приложив его к знанию сущего, и назвал единственной мудростью познание истины сущего, а философией – стремление к этому знанию и овладение им, то есть стремление к мудрости.

[2] Он заслуживает большего доверия, нежели те, кто давал другие определения, поскольку он прояснил смысл слова и определил суть дела. Он определил мудрость как знание истины сущего, полагая, что знание представляет собой безошибочное и неизменное овладение материалом; сущее же есть то, что остаётся самим собой и вечно пребывает во Вселенной, ни на миг из неё не выпадая. Это сущее должно быть нематериальным, соучаствующим в прочих одноимённых с ним сущих, о которых говорят, что они есть.

[3] Однако телесные и материальные вещи пребывают в непрестанном течении и изменении, изначально и вечно подражая материи и исходной природе, которые по своему характеру являются изменчивыми и всякий раз другими. Что касается бестелесных вещей, которые мыслятся отнесёнными к телесным или связанными с ними, а таковы качества, количества, фигурности, великость, малость, равенство, сопряжения,[1] энергии, положения, место, время и прочее, что имеется у всякого тела, то все они сами по себе неподвижны и неизменны, однако по сопричастности участвуют и имеют свою долю в изменениях, происходящих с тем телом, к которому они относятся.

[4] И мудрость состоит прежде всего в знании таких вещей, а по сопричастности и других, телесных, в которых эти первые принимают участие.

---

[1] Ср. Евклид, *Начала* V, опр. 4: «Отношение есть сопряжение (σχέσις) двух однородных величин по их количеству».

ГЛАВА II

[1] Все эти вещи нематериальны, вечны, бесконечны, во всём одинаковы и неизменны по своей природе, и они всегда остаются самими собой по своей сути, и о каждой из них говорится как о сущем в собственном смысле. Те же вещи, которые подвержены возникновению и уничтожению, росту и убыванию, всякому изменению и участию, непрестанно меняются; и хотя о них и говорят, как о сущих, поскольку первые принимают в них участие, но по своей собственной природе они не являются действительно сущими; ведь они не остаются теми же самыми ни на мгновение, но всё время проходят через все виды перемен.

[2] Платон в *Тимее* говорит об этом так: «Что есть вечное бытие, не имеющее возникновения, и что есть возникающее, но никогда не сущее? Постигаемое с помощью разумения и рассуждения – это и есть вечное и тождественное бытие; а подвластное мнению и неразумному ощущению возникает и гибнет, но никогда не существует на самом деле». [2]

[3] Но поскольку достойной целью человеческих стремлений является благая жизнь (а она достигается только с помощью философии и никак иначе; философия же, как я уже сказал, есть стремление к мудрости, мудрость же – это знание истины сущего, а из сущего одно называется так в собственном смысле, а другое по одноимённости), постольку будет разумным и даже необходимым тщательно различить и разделить присущие вещам свойства.

[4] Что касается самих сущих, как в собственном смысле, так и одноимённых с ними, как умопостигаемых, так и воспринимаемых чувствами, то одни из них, такие как животное, космос, дерево и схожие с ними, являются едиными и сплошными, и по своему характеру они называются величинами в собственном смысле; другие же, такие как стадо, народ, куча, хор и схожие с ними, являются раздельными, прилежащими друг к другу и скученными, и они называются множествами.

[5] Поэтому мудростью следует считать знание этих двух видов. Но поскольку всякое множество и всякая величина по своей природе обязательно беспредельны (ведь множество начинает расти от определённого корня, но его рост никогда не завершается; и величина начинает делиться от определённого целого, но её рассечение никогда не может завершиться), и поскольку знание всегда является знанием определённых сущих и никогда – беспредельных, тем самым очевидно, что ни о величине как таковой, ни о множестве как таковом знание установлено быть не может (ведь оба они сами по себе неограниченны, множество в отношении увеличения и величина в отношении уменьшения). И чтобы установить такое знание по отношению к ним обоим, следует свести множество к некоторому количеству и величину к некоторому размеру.

---

[2] Платон, *Тимей* 28 а.

ГЛАВА III

[1] Далее, среди количеств одно рассматривается само по себе, несвязанное с чем-либо другим, и таковы чётное, нечётное, совершенное и схожие с ними; а другое соотнесено с чем-то иным и рассматривается в связи с этим иным, и таковы двойное, большее, меньшее, половина, полуторное, сверхтретье и схожие с ними. И ясно, что к изучению количества приложимы два метода постижения знания и суждения: арифметика – к тому, которое рассматривается само по себе, и музыка – к тому, которое рассматривается в отношении к другому.

[2] И опять же, поскольку одни размеры рассматриваются в неподвижности и покое, а другие – в движении и обращении, с размерами имеют дело две другие науки: геометрия – с неподвижным и покоящимся, а сферика – с подвижным и вращающимся.

[3] Без всего этого невозможно ни тщательно исследовать виды сущего, ни открывать истину сущего, знание которого является мудростью; и ясно, что без этого нельзя и правильно философствовать, ведь «подобно тому, как живопись сближает низкие искусства с правильной теорией, так и линии, числа, гармонические интервалы и круги вращения содействуют постижению учений мудрости», как сказал пифагореец Андрокид.[3]

[4] То же самое говорит и Архит Тарентский в начале *Гармоники* в следующих словах: «Думается мне, что знатоки математических наук пришли к верному познанию, и нет ничего странного в том, что они правильно судят о свойствах всех отдельных сущностей. Ведь если они правильно познали природу целого, то должны были верно усмотреть и свойства отдельных частей. И о геометрии, арифметике и сферике они передали нам точные познания, равно как и о музыке. Думается, что эти математические науки – родные сёстры, ибо они занимаются двумя изначально родственными видами сущего».[4]

[5] Также и Платон в конце тринадцатой книги *Законов* (некоторые называют эту книгу *Философ*, поскольку он рассматривает и определяет в ней, каким надлежит быть настоящему философу), подытоживая то, что обсуждалось и утверждалось прежде, добавляет: «Всякий чертёж, сочетание чисел или гармоническое единство имеют сходство с кругообращением звёзд; следовательно, единичное для того, кто надлежащим образом его усвоил, разъясняет и всё остальное. Впрочем, как мы говорим, это будет лишь в том случае, если он правильно усваивает, производя своё наблюдение над единичным. Ведь здесь обнаруживается связь всех этих вещей. Если же человек берётся философствовать как-то иначе, ему придётся призвать на помощь удачу. Есть только один этот путь, только такой способ, только эти науки – легки ли они или трудны, их надо преодолеть. Я считаю поистине мудрейшим человека, охватившего таким путём все эти знания, и это я утверждаю и в шутку, и всерьёз».[5]

---

[3] Андрокид-пифагореец, автор книги *О символах* (DK 14 фр. 8).

[4] DK 47 B 1.

[5] Платон, *Послезаконие* 991 e – 992 a.

[6] Ведь ясно, что эти науки суть лестницы и мосты, которые переносят наши умы от воспринимаемого чувством и мнением к постижимому мыслью и знанием; и от знакомых и привычных нам с детства материальных и телесных вещей – к непривычным и чуждым нашим чувствам, однако их нематериальность и вечность родственны нашим душам и, что ещё важнее, заключённому в них разуму.

[7] И в *Государстве* Платона, когда собеседник Сократа пытается различными доводами показать пользу математических наук в человеческой жизни, он указывает, что арифметика нужна при расчётах, распределениях, взносах, обменах и паях, геометрия полезна при устройстве лагерей, строительстве городов и храмов и разделе земли, что музыка служит для празднеств, развлечений и при совершении религиозных обрядов, а сферика и астрономия важны для земледелия, мореплавания и других начинаний, требующих лёгких и правильных предвестий; однако Сократ упрекает его, говоря: «Ты, видно, боишься, как бы кому-то не показалось, будто ты предписываешь бесполезные науки. Между тем вот что очень важно, хотя это и кажется невозможным: в этих науках очищается и вновь оживает взор души каждого человека, который другие занятия губят и делают слепым, а между тем сохранить его в целости более важно, чем иметь тысячу телесных глаз, ведь только при его помощи можно увидеть истину».[6]

ГЛАВА IV

[1] Какой же из этих четырёх путей следует изучать первым? Очевидно тот, который по своей природе предшествует остальным, является верховным началом, корнем и, так сказать, матерью всех остальных.

[2] Но такова арифметика, и не только потому, что она предшествует остальным [наукам] в уме бога-творца как некий космический и образцовый замысел, опираясь на который, как на установление и изначальный образец, создатель Вселенной упорядочивает свои материальные творения и приводит их к подобающим целям; но также и потому, что по своей природе она является перворождённой, ибо с её уничтожением уничтожаются прочие науки, но сама она не уничтожается вместе с ними. К примеру, «животное» по природе предшествует «человеку», ведь если уничтожить «животное», уничтожится и «человек», но если уничтожить «человека», то «животное» не уничтожится; и «человек» предшествует «грамматику», ведь если нет «человека», нет и «грамматика», но если нет «грамматика», «человек» всё же может существовать. Поэтому то, что способно уничтожать вместе с собой прочее, существует в первую очередь.

[3] И обратно, то называется младшим и последующим по рождению, что привносит с собой другое, но само не привносится этим другим. Таковы «музыкант», который всегда привносит с собой «человека», и «лошадь», ко-

---

[6] Платон, *Государство* 527d–e.

торая всегда привносит с собой «животное». Однако обратное неверно: ведь если существует «животное», то совсем не обязательно должна существовать «лошадь», и если существует «человек», он отнюдь не привносит с собой «музыканта».

[4] Так же обстоят дела и с названными выше родами знания; если имеется геометрия, то она обязательно привносит с собой арифметику, ведь когда геометрия говорит о треугольнике и четырёхугольнике,[7] восьмиграннике и двадцатиграннике,[8] а также об удвоенном, восьмикратном, полуторном, или о чём-либо ином в таком же духе, все эти вещи не могут мыслиться без привнесённых с ними чисел. И как бы существовало или могло быть названо «тройное», если бы ему не предшествовало число 3, так же как и «восьмикратное» без 8? И напротив, 3, 4 и прочие числа существуют без именованных по ним фигур.

[5] Поэтому с уничтожением арифметики уничтожается геометрия, но сама она не уничтожается вместе с последней, и хотя арифметика привносится вместе с геометрией, но сама она её не привносит.

ГЛАВА V

Так же обстоят дела и с музыкой; и не только потому, что взятое само по себе предшествует соотнесённому, как «большой» и «больше», «богатый» и «богаче», «человек» и «отец», но также и потому, что музыкальные созвучия кварты (διὰ τεσσάρων), квинты (διὰ πέντε) и октавы (διὰ πασῶν) названы так сообразно числам. Ведь все гармонические отношения подобны числовым: кварта есть сверхтретье отношение, квинта – полуторное, октава – двукратное; трёхкратное же отношение – это октава и квинта, и четырёхкратное – это совершенная, или двойная, октава.

Ещё более очевидно, что сферика использует арифметику во всех своих рассуждениях, и не только потому, что в порядке порождения она идёт за геометрией (ибо движение по природе следует за покоем), и даже не потому, что в движениях звёзд наличествует музыкальная гармония, – но прямо потому, что все восходы, закаты, прямые и обратные движения планет, затмения и фазы согласуются между собой по исчислимым периодам и количествам.

Поэтому мы правильно поставим арифметику на первое место в систематическом изучении, как науку первую по природе, самую почитаемую и самую старшую, а тем самым – мать и кормилицу всех остальных; с этой науки мы ради ясности и начнём.

[7] Словом τετράγωνον древние греки называли квадрат. Четырёхугольник общего вида назывался τετράπλευρον – «четырёхсторонник».

[8] Правильные восьмигранник (ὀκτάεδρον) и двадцатигранник (εἰκοσάεδρον) – «тело воздуха» и «тело воды» в космологии платоновского *Тимея*.

ГЛАВА VI

[1] Всё, что по природе было искусно расположено в космосе, обнаруживается разделённым и упорядоченным в частях и в целом в соответствии с числом, по промыслу и уму создателя этого целого; и оно упрочено по предначертанному образцовому плану в соответствии с числом, изначально имевшимся в разуме создавшего космос бога. Это число лишь мыслится, и оно во всех отношениях нематериально, но всё же оно является действительным и вечно сущим, так что в соответствии с ним, сообразуясь с планом творения, были созданы время, движение, небо, звёзды и всевозможные обращения.

[2] Но тогда главенствующее над всем этим научное число обязательно должно гармонировать прежде всего с самим собой, а не с тем, что находится ниже него.

[3] А всё гармоничное согласует в себе существующие противоположности: ведь не может пребывать в гармонии ни то, что не существует, ни то, что существует схожим образом, ни то, что существует различно, но безотносительно друг к другу. Следовательно, гармония возможна между такими вещами, которые существуют, различны и имеют отношение друг к другу.

[4] Из таких вещей образуется и научное число: ведь два его первейших вида, нечётное и чётное, имеют количественно различные и разнородные сущности, и они по своей удивительной и божественной природе чередуются в нераздельной и однородной гармонии, как мы это сейчас увидим.

ГЛАВА VII

[1] Число есть ограниченное множество, или собрание единиц, или поток составленного из единиц количества.[9] И первое разделение числа есть разделение на чётное и нечётное.

[2] Чётным называется число, которое разделяется на два равных и не содержит единицы в середине; а нечётное число не может разделяться на два равных из-за присутствия единицы в середине.[10]

[3] Таково обычное определение; согласно же пифагорейцам чётное число есть такое, которое допускает разделение на наибольшие и наименьшие, наибольшие по размеру и наименьшие по количеству, в соответствии с природной противоположностью этих двух видов; нечётное же не может претерпеть этого, поскольку разделяется на два неравных.

[4] Ещё одним способом, согласно древним, чётное число определяется как такое, которое допускает разделение как на два равных, так и на два неравных, за исключением первообразной двойки, допускающей только одно разделение на равные; причём всякое разделение, как бы оно ни было произведено, являет

---

[9] Ср. Евклид, *Начала* VII, опр. 2: «Число есть множество, составленное из единиц».

[10] Ср. Евклид, *Начала* VII, опр. 6, 7: «Чётное число есть делящееся пополам. Нечётное же – не делящееся пополам или отличающееся на единицу от чётного числа».

только один вид числа, непричастный другому.[11] А нечётное есть такое число, которое во всяком разделении порождает неравные, причём оба они относятся к двум различным видам числа, и они никогда не возникают порознь друг от друга, но всегда появляются вместе.

[5] Если определять одно через другое, то нечётное число есть такое, которое отличается от чётного на единицу в обе стороны, как по увеличению, так и по уменьшению; и чётное число также есть такое, которое отличается от нечётного на единицу в обе стороны, как по увеличению, так и по уменьшению.

ГЛАВА VIII

[1] Каждое число есть полусумма стоящих по обе стороны от него, и полусумма следующих за ними в обоих направлениях, и полусумма следующих, покуда это следование возможно. [2] Одна только единица, поскольку она не имеет двух соседей по обе стороны от себя, является половиной от прилежащего к ней; ведь единица по природе есть начало всего.

[3] Чётные числа подразделяются на чётно-чётные, нечётно-чётные и чётно-нечётные: чётно-чётные и нечётно-чётные противоположны друг другу, а чётно-нечётное является общим для них обоих как среднее между ними.[12]

[4] Чётно-чётное число есть такое, которое и само способно делиться на два равных, согласно природе своего рода, и получившиеся доли также делятся пополам, и доли этих долей также делятся пополам, и это деление идёт тем же самым образом далее, вплоть до неделимой по природе единицы. [5] Возьмём для примера 64: его половина есть 32, а у него 16, а у него 8, а у него 4, а у него 2, а половиной последнего служит завершающая единица, по своей природной сути неделимая и не допускающая наличия половины.

[6] И всякая доля, получающаяся в этой последовательности делений, всегда будет сама и чётно-чётной по имени, и чётно-чётной по значению;[13] и ни одно число из другого рода[14] не имеет с ними ничего общего. [7] Оно потому и называется чётно-чётным, что и само оно чётное, и все его доли и доли его

[11] Чётное число разделяется либо на два чётных, либо на два нечётных числа. А нечётное число разделяется на чётное и нечётное числа.

[12] Приводимые ниже пифагорейские определения трёх видов чётного числа являются категоричными. Напротив, определения, которые даёт Евклид в VII книге *Начал*, категоричными не являются: «(8) Чётно-чётное число есть чётным числом измеряемое чётное число раз. (9) Чётно-нечётное есть чётным числом измеряемое нечётное число раз. (10) Нечётно-чётное есть нечётным числом измеряемое чётное число раз. (11) Нечётно-нечётное есть нечётным числом измеряемое нечётное число раз». Опр. 10 встречается лишь в одном списке *Начал*; оно и в самом деле является лишним, поскольку чётно-нечётное и нечётно-чётное числа здесь разнятся лишь порядком сомножителей.

[13] Возьмём, к примеру, число 32. Его восьмая доля («чётная по имени») составляет 4 («чётное по значению»).

[14] То есть не являющееся чётно-чётным.

долей вплоть до единицы чётны по имени и по значению. Иными словами, всякая его доля чётно-чётна по имени и чётно-чётна по значению.

[8] Способ последовательного порождения чётно-чётных чисел, из которого ни одно такое число не выпадает, состоит в следующем. [9] Нужно шагать от единицы как от корня в двойном отношении до бесконечности, и все числа, которые при этом получатся, будут чётно-чётными, и никакие другие числа среди них не встретятся; а получатся при этом числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 и так далее.

[10] Всякое из этих чисел порождается двойным отношением, если идти от единицы, предшествующей всем чётно-чётным числам. При этом всякая доля, которая у него имеется, всегда называется по одному из тех чисел, что стоят перед ним, и собрание единиц в этой доле также является одним из тех чисел, что стоят перед ним, причём оба числа соотносятся друг с другом и заменяют друг друга. Пусть имеется чётное число членов, полученных удвоением, начиная с единицы; между ними не найдётся одного среднего, но все они будут браться по два, так что будут соотноситься и заменять друг друга доли и значения, значения и доли; и эти пары будут следовать по порядку, начиная от тех двух, что стоят рядом с двумя средними, потом следующие два по обе стороны, и так вплоть до крайних членов, у которых целое будет соответствовать единице и единица целому. К примеру, если мы возьмём 128 за наибольшее, то число членов будет подходящим, поскольку оно равно восьми; и [средних] будет два, 8 и 16; и они будут соответствовать друг другу как доли, потому что для целого числа 128 восьмой долей будет 16 и шестнадцатой долей будет 8. Двигаясь в обоих направлениях, мы найдём, что четвёртой долей будет 32 и тридцать второй долей будет 4; и половиной будет 64, а шестьдесят четвёртой долей будет 2; и, наконец, крайняя единица будет сто двадцать восьмой долей, целое же будет содержать 128 единиц.

[11] Если же последовательность образована нечётным числом членов, например семью, и мы имеем дело с числом 64, то в ней обязательно будет иметься средний член, что соответствует природе нечётного; и этот член будет соотноситься с самим собой, потому что у него нет пары, а те, что стоят по обе стороны от него, будут соответствовать друг другу, вплоть до завершения у противоположных краёв. Так, единица будет шестьдесят четвёртой долей, целое же будет содержать 64 единицы; и 32 будет половиной, а тридцать второй долей будет 2; и четвёртой долей будет 16, а шестнадцатой долей будет 4; а 8 будет восьмой долей, которой ничто не противоположно.

[12] Всем им также присуще то, что, будучи последовательно сложенными вместе, они оказываются равными следующему за ними числу за вычетом единицы, так что их сумма обязательно будет нечётным числом: ведь всегда то, что вместе с единицей равно чётному, само является нечётным. [13] Это наблюдение будет впоследствии полезно нам при построении совершенных чисел.[15] А сейчас

[15] См. I 16, 1 и сл.

рассмотрим пример: 256 за вычетом единицы равно всем предшествующим ему членам, начиная с единицы, составленным вместе; и стоящее перед ним число 128 за вычетом единицы равно всем предшествующим ему членам; и все предыдущие члены таким же образом соотносятся с суммой своих предшествующих. Так и самой единице не хватает единицы, чтобы стать равной числу 2, стоящему за ней; и им вместе нужна ещё единица, чтобы стать равными следующему члену; и всем им вместе не хватает единицы до следующего члена, и это происходит непрестанно до бесконечности.

[14] Надо упомянуть ещё следующее: если число членов в последовательности чётно-чётных чисел является чётным, то произведение двух крайних членов будет равно произведению двух средних членов; если же это число будет нечётным, то произведение крайних членов будет равно произведению среднего члена на самое себя. Так, для чётного числа членов 1×128 равно 8×16, ещё 2×64, и ещё 4×32,[16] и так будет и в других случаях; а для нечётного числа членов 1×64 равно 2×32, и ещё 4×16, и всё это ещё раз равно 8×8, когда единственный средний член умножается на самое себя.

ГЛАВА IX

[1] Чётно-нечётным называется число, которое относится к роду чётных чисел, но по своим видовым особенностям является противоположностью рассмотренных выше чётно-чётных чисел. Такое число хотя и допускает разделение на две равные половины в соответствии со своим общим родом, однако его половины уже не делятся пополам; таковы числа 6, 10, 14, 18, 22, 26, и подобные им, ведь после того, как они разделены пополам, их половины пополам уже не делятся.

[2] Присущее всем этим числам свойство состоит в том, что, какая бы доля у них не имелась, она будет разноимённа с её значением,[17] и количество в каждой доле будет разноимённо с самой долей, и значение доли и имя доли никоим образом не будут относиться к одному роду.[18] К примеру, рассмотрим число 18; его половиной, чётной по имени, является число 9, нечётное по значению; и опять, его третьей долей, нечётной по имени, является число 6, чётное по значению; и так попеременно шестой долей будет 3 и девятой долей будет 2; и другие числа будут иметь это же свойство.

[3] И наверное, они были так названы потому, что хотя сами они чётные, их половины сразу же оказываются нечётными.

[4] А производятся они умножением на двойку последовательных чисел, которые начинаются с единицы и идут с разностью в двойку, то есть нечётных

[16] В греческом тексте знака «×» конечно же нет, умножение описывается словами.

[17] Иначе говоря, ни одно из чётно-нечётных чисел не является квадратом, так как все они делятся на 2, но не делятся на 4.

[18] Иначе говоря, если такое число разложить на два сомножителя, один из них обязательно окажется чётным, а другой нечётным.

чисел, расположенных последовательно и продолжаемых сколько угодно. Таким образом последовательно производятся числа 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, и так далее, насколько захочется. И больший член здесь всегда превосходит предшествующий ему меньший на четвёрку; причина же состоит в том, что мы получаем их из последовательных нечётных чисел, которые и изначально превосходят друг друга на двойку, и ещё раз умножаются на двойку, но дважды два как раз даёт четыре.

[5] И в натуральном ряду чисел чётно-нечётные числа обнаруживаются на пятом месте, считая от одного до другого, превосходят же они друг друга на четвёрку, и между двумя соседями пропускается три числа; а получаются они увеличением нечётных чисел в два раза.

[6] И говорят, что они по своим свойствам противоположны чётно-чётным числам, потому что у этих только наибольший член делится пополам, а у тех только наименьший не делится; и ещё потому, что у тех части, равноотстоящие от краёв по направлению к средним членам или среднему члену, дают произведение, равное произведению средних или квадрату среднего, а у этих при схожем расположении и сравнении средний член равен полусумме двух крайних, а если имеется два средних члена, их сумма будет равна сумме крайних.

ГЛАВА X

[1] Нечётно-чётное число представляет собой третий вид чётного числа, который соотносится с обоими рассмотренными выше видами как средний член с двумя крайними, ведь в одном отношении оно подобно чётно-чётному числу, а в другом – чётно-нечётному; и в чём оно отличается от одного, в том сходится с другим, а в чём сходится с одним, в том отличается от другого.

[2] Будучи чётным числом, оно может быть разделено на две равные половины, причём получившиеся доли тоже делятся пополам, и иногда даже доли этих долей, однако это деление долей пополам не может быть продолжено вплоть до единицы. Таковы числа 24, 28, 40; у каждого из них имеется своя половина, и у каждого – половина половины, и у некоторых из них это деление частей пополам может быть продолжено и дальше. Однако ни у одного из них это деление долей пополам не доходит до единицы, неделимой по природе.

[3] Допуская более чем одно разделение, эти числа подобны чётно-чётным и несхожи с чётно-нечётными; а в том, что это разделение не доходит до единицы, они подобны чётно-нечётным и несхожи с чётно-чётными.

[4] Они совмещают в себе свойства двух вышеназванных видов, а также обладают такими свойствами, которых у тех не было; ведь из тех в одном виде только самая большая доля была делимой, а в другом только самая меньшая была неделимой, а у этого нет ни того, ни другого; и можно видеть, что у них имеется более одного деления со стороны наибольшей доли и более одной неделимости со стороны наименьшей доли.

[5] И далее, у них имеются доли, не противоположные по имени значению и не разнородные с ним, как это было у чётно-чётных чисел; но у них всегда есть

и другие доли, противоположные по имени значению и разнородные с ним, как это было у чётно-нечётных чисел. Так, в числе 24 следующие доли по имени не противоположны значению: четверть 6, половина 12, шестая 4, двенадцатая 2; противоположны же треть 8, восьмая доля 3, двадцать четвёртая доля 1; и так же в прочих числах.

[6] Эти числа порождаются хитроумным путём, и сам этот способ представляет собой смешение двух других. В то время как чётно-чётные числа возникают из чётных удвоением от единицы до бесконечности, и чётно-нечётные возникают из нечётных, от тройки до бесконечности, эти обязательно составляются из обоих родов и имеют нечто общее с ними обоими.

[7] Пусть нечётные числа расположены в ряд, начиная с тройки: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, и так далее; и чётно-чётные числа, начиная с четвёрки, расположены в другой ряд в своём порядке: 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, и так далее. [8] Возьми первое число в одном из этих двух рядов (всё равно в каком), умножь его последовательно на все числа другого ряда и запиши результаты; затем возьми второе число этого же ряда, умножь его на числа другого ряда, продвигаясь так далеко, насколько пожелаешь, и опять запиши полученное; проделай то же самое с третьим числом, и так далее; и всё, что ты при этом получишь, будет ничем иным, как нечётно-чётными числами.

[9] Чтобы изобразить это, возьми первое число из ряда нечётных и последовательно умножь его на все числа второго ряда: 3 × 4, 3 × 8, 3 × 16, 3 × 32, и так до бесконечности; получившиеся числа 12, 24, 48, 96 запиши в один ряд. Вновь проделай то же самое со вторым числом: 5 × 4, 5 × 8, 5 × 16, 5 × 32, при этом ты получишь числа 20, 40, 80, 160; теперь проделай это же с третьим числом: 7 × 4, 7 × 8, 7 × 16, 7 × 32, и получатся числа 28, 56, 112, 224; действуя так, сколько тебе будет угодно, ты будешь получать согласованные результаты.

Нечётные числа	3	5	7	9	11	13
Чётно-чётные числа	4	8	16	32	64	128
	12	24	48	96	192	384
	20	40	80	160	320	640
Нечётно-чётные числа	28	56	112	224	448	896
	36	72	144	288	576	1152
	44	88	176	352	704	1408

[10] Расположив результаты умножения в параллельные ряды, ты увидишь удивительную таблицу, в которой по ширине проявятся свойства чётно-нечётных чисел, так что средний член всегда будет полусуммой крайних, а если средних два, то их сумма будет равна сумме крайних; а по длине проявятся свойства чётно-чётных чисел, так что произведение крайних будет равно квадрату среднего, если имеется один средний член, и произведению средних, если средних два. Так в этом одном виде соединяются свойства обоих других, ибо он является их природной смесью.

ГЛАВА XI

[1] Нечётные числа при разделении по родам противоположны чётным и не имеют с ними ничего общего, ибо те, как уже было сказано, делятся пополам, эти же на две равные половины не делятся. И среди них обнаруживаются три различных вида: одни называются первичными (πρῶτοι) и несоставными,[19] иные – вторичными и составными, а промежуточный род между этими двумя, рассматриваемый как средний между крайними, сам по себе является вторичным и составным, но по отношению к другим – первичным и несоставным.

[2] К первому из этих видов, первичному и несоставному, относятся нечётные числа,[20] у которых нет никаких других долей, кроме той, которая именуется по самому числу и обязательно является единицей;[21] таковы числа 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. Ни у одного из них не удастся найти никакой другой доли, кроме той, которая именуется по самому числу, и в каждом из них это будет единица; для трёх имеется только треть (одноимённая с самим числом и являющаяся единицей), для 5 – только пятая доля, для 7 – только седьмая, для 11 – только одиннадцатая, и долей всех этих чисел будет только единица.

[3] А называются они так потому, что могут быть измерены единственным общим для всех числом – самой первой единицей, и никакими другими; а также потому, что они не производятся никаким другим числом, взятым кратно, но только единицей: ведь взятая пятикратно, она даёт 5, а семикратно – 7, и для других чисел будет то же самое сообразно их количеству. А когда они перемножаются между собой, то из них, как из источника и корня, возникают другие числа; потому они и называются первичными, что существуют прежде других. Ведь всякое начало является элементарным и несоставным, и всё в него разрешается и из него составляется, само же оно ни во что не разрешается и ни из чего не составляется.

ГЛАВА XII

[1] Вторичным же и составным[22] является такое нечётное число (поскольку оно относится к тому же самому роду), которое не является первообразным; ведь оно возникает кратным соединением чего-то другого. Поэтому вторич-

---

[19] Говоря о *простых числах*, мы в первую очередь подразумеваем то, что они неразложимы на натуральные множители (в этой связи греки называли их *несоставными*). Греческий термин *первичные числа* указывает на то, что с каждого такого числа начинается ряд кратных ему чисел, но само оно не стоит ни в каком ряду в качестве кратного.

[20] Чётную двойку Никомах забывает отнести к первичным числам. Ср. Аристотель, *Топика* 157 a 39: «… разве только речь идёт о чём-то единственном в своём роде, как, например, из всех чётных чисел двойка – единственное первичное число».

[21] Ср. Евклид, *Начала* VII, опр. 11.

[22] Ср. Евклид, *Начала* VII, опр. 14. Никомах, в отличие от Евклида, не определяет простые и составные числа независимо от предшествующих разделений, но искусственным образом производит разделение на эти два рода только для нечётных чисел.

ному числу будет свойственно иметь, в дополнение к названному по его имени доле, разноимённую или разноимённые доли; и для долей, названных по его имени, мерой всегда является единица, для разноимённой же или разноимённых – не единица, но всегда то число или те числа, перемножением которых оно получается; к примеру, таковы числа 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35, 39. Все эти числа измеряются единицей, как и прочие другие, и имеют тем самым названную по ним долю, что является для чисел общеродовым природным свойством; однако их специальное и особенное свойство таково, что они всегда имеют разноимённую с ними долю или доли. Так 9, в дополнение к девятой доле, имеет третью долю; и 15 имеет третью и пятую доли в дополнение к пятнадцатой; 21 имеет седьмую и третью долю в дополнение к двадцать первой; и 25 в дополнение к названной по нему двадцать пятой доле имеет пятую долю.

[2] И они называются вторичными, потому что могут быть измерены другим числом помимо единицы, и потому что они не являются первообразными, но производятся каким-то другим числом, помноженным на самое себя или на какое-то иное число; для 9 это 3, для 15 это 5 или 3, – клянусь Зевсом! – и далее таким же образом. И составными они называются по той же причине, ведь они могут быть разложены на те же самые числа, из которых они составляются, и именно этими числами они измеряются. Ведь то, что раскладывается, не является несоставным, но всегда будет составным.

ГЛАВА XIII

[1] В то время как эти два вида нечётного противоположны друг другу, третий вид представляется чем-то средним между ними, потому что сам по себе он является вторичным и составным, а по отношению к другому – первичным и несоставным.[23] Так бывает, если число, в дополнение к общей мере, каковой является единица, измеряется какой-либо другой мерой, и тем самым имеет неодноимённую с собой долю или доли в дополнение к одноимённым. Однако когда оно сопоставляется с другим аналогичным числом, при этом может обнаружиться, что оно не может быть измерено общей с этим другим числом мерой, и у них нет одноимённой доли. Таково 9 по отношению к 25: каждое из них само по себе является вторичным и составным, однако между собой они имеют общей мерой только единицу, и у них нет одноимённой доли; ведь третья часть, которая имеется у первого, отсутствует у второго, и пятая часть, которая имеется у второго, отсутствует у первого.

[2] Способ получения всех этих чисел Эратосфен назвал «решетом», потому что здесь сначала берутся нечётные числа, все вместе и без различий между ними, а затем этим производящим методом разделяются, как посредством решета, отдельно первичные и несоставные числа, отдельно вторичные и составные, и отдельно находятся смешанные.

---

[23] Ср. Евклид, *Начала* VII, опр. 13. Выделение Никомахом третьего вида наряду с первыми двумя конечно же логически неправомочно.

[3] Способ решета состоит в следующем. Все нечётные числа, начиная с тройки, последовательно располагаются в ряд, продолжаемый так далеко, насколько это возможно. Начав с первого из них, я смотрю, какие числа оно измеряет, и нахожу, что таковы числа, идущие через два, покуда это можно проследить. И оно измеряет не случайно расположенные числа: первое из них отделено от него двумя промежуточными членами, и оно, в соответствии с количеством в том числе, с которого начинается ряд, является трёхкратным; второе отделено от предыдущего ещё двумя членами и является пятикратным; третье отделено от предыдущего ещё двумя и является семикратным; четвёртое отделено от предыдущего ещё двумя и является девятикратным; и так до бесконечности.

[4] Начав заново, я смотрю, какие числа измеряет второе число, и нахожу, что все они отделены друг от друга четырьмя промежуточными членами. Первое из них, в соответствии с количеством в том числе, с которого начинается ряд, является трёхкратным; второе согласно второму является пятикратным; третье согласно третьему является семикратным, и так до бесконечности.

[5] И ещё раз, возьмём третий член ряда, то есть 7, и он в качестве меры измеряет члены ряда, отделённые друг от друга шестью промежуточными членами, и в первом из них он укладывается 3 раза, в соответствии с количеством в самом первом числе; во втором 5 раз, ибо таково второе по порядку число; в третьем 7 раз, ведь таково третье число, которое стоит в исходном ряду.

[6] И в целом ты можешь действовать так же, так что числа будут отмериваться в соответствии с их собственным порядком в ряду; и интервал, разделяющий отмериваемые члены, задаётся последовательностью чётных чисел от двойки до бесконечности, или удвоением положения меры; а сколько раз эта мера откладывается, задаётся последовательностью нечётных чисел, начиная с тройки.

[7] Пометив числа значками, ты найдёшь, что члены, участвующие в измерении, никогда не измеряют полностью одну и ту же совокупность, и иногда даже два из них не измеряют одного числа, – и хотя все числа принимают участие в этом измерении, но некоторые всецело избегают того, чтобы быть измеренными, некоторые измеряются только одной мерой,[24] а некоторые – двумя или больше.

[8] И те из них, которые ни разу не окажутся измеренными, но избегают этого, будут первичными и несоставными, просеянными с помощью решета; те, которые в соответствии со своим количеством измеряются единственной мерой, будут иметь одну единственную разноимённую часть в дополнение к одноимённой; прочие же, которые измеряются двумя или более различными мерами, будут иметь несколько разноимённых частей в дополнение к одноимённой; и все они будут вторичными и составными.

[24] Таковы квадраты простых чисел.

[9] Третья часть, общая с двумя названными, сама по себе вторичная и составная, но по отношению к другому первичная и несоставная, будет состоять из таких чисел, которые измеряются некоторым первым и несоставным числом в соответствии с его собственным количеством, если некоторое произведённое таким образом число берётся в отношении к другому, произведённому таким же образом.[25] К примеру, когда 9 (а оно получается, когда 3 откладывается в соответствии с собственным количеством, то есть трижды) соотносится с 25 (а оно получается, когда 5 откладывается в соответствии с собственным количеством, то есть пять раз), они не имеют никакой общей меры, кроме единицы.

[10] Теперь мы рассмотрим приём,[26] позволяющий выяснить, будут ли числа между собой первичными и несоставными, либо вторичными и составными, когда первые имеют в качестве общей меры только единицу, а вторые – некоторое другое число, кроме единицы, и установить, каково это число.

[11] Пусть нам даны два нечётных числа, и предложено выяснить, являются ли они между собой первичными и несоставными или же вторичными и составными; и если они будут вторичными и составными, то какое число является их общей мерой. Следует сравнить данные числа и затем вычитать меньшее из большего, покуда это возможно; затем нужно вычитать остаток из вычитаемого, покуда это возможно; и эта перемена и противовычитание (ἀνταφαίρεσις) обязательно завершится либо на единице, либо на некотором числе, дважды одном и том же, которое обязательно будет нечётным.

[12] И если вычитания завершатся на единице, то данные числа будут первичными и несоставными между собой; если же они завершатся на каком-то другом числе, нечётном и полученном дважды, то говорят, что они являются вторичными и составными между собой, и имеют своей общей мерой это дважды полученное число. К примеру, пусть нам даны числа 23 и 45, вычтем 23 из 45, и в остатке будет 22; вычтем его из 23, и в остатке будет единица; вычитая её из 22 столько раз, сколько это возможно, ты в конце концов получишь единицу. Тем самым они являются первыми и несоставными друг между собой, и их общей мерой будет оставшаяся единица.

[13] Но если нам предложат другие числа, 21 и 49, я вычту меньшее из большего, и получу в остатке 28; затем я снова вычту из него 21 (ведь это возможно), и останется 7. Его я вычту из 21, получу 14; из него снова вычту 7 (ведь это возможно), и останется 7. Но семёрку из семёрки уже невозможно вычесть, поэтому процесс завершается на числе 7, и тем самым числа 21 и 49 исходно являются вторичными и составными между собой, и 7 является их общей мерой в дополнение ко всеобщей единице.

---

[25] То, что квадраты простых чисел являются взаимно простыми – это, конечно, частный случай взаимно простых чисел, а не общий.

[26] Так называемый *алгоритм Евклида* для определения наибольшей общей меры двух чисел или двух величин описан Евклидом для чисел: *Начала* VII, 1; для величин: *Начала* X, 2.

ГЛАВА XIV

[1] Начнём заново: из обычных чётных чисел одни являются избыточными, другие недостаточными, и как крайние они противоположны друг другу; те же, что расположены между ними, называются совершенными.

[2] Те, о которых мы сказали, как о противоположных друг другу, то есть избыточные и недостаточные, отличаются друг от друга в отношении неравенства по направлению как большее и меньшее, и никакое иное неравенство по направлению для них не подходит: ни непригодность, ни болезнь, ни несоизмеримость, ни непристойность, ни какое-либо иное. Ибо в области большего произрастают превосходство, переполнение, избыточность и изобилие, а в области меньшего – нужда, недостаток, лишение и незначительность; а между избытком и недостатком находится равенство, то есть доблесть, здоровье, умеренность, приличие, красота и подобие, потому-то этот вид числа и называется совершенным.

[3] Избыточное число есть такое, у которого принадлежащие ему доли наличествуют в избытке, – как если бы у живого существа было в избытке телесных частей, и оно было бы десятиязыким, как сказал поэт,[27] или десятиротым, или девятигубым, или с тремя рядами зубов, или сторуким, или у него было бы слишком много пальцев на каждой руке. Подобно этому, когда все доли числа найдены и сложены вместе, и обнаружено, что все они вместе превосходят само число, такое число называют избыточным, ведь оно превосходит ту соразмерность, которая имеется между совершенным числом и его долями. Таковы числа 12, 24 и подобные им. Ведь у числа 12 имеется половина 6, треть 4, четверть 3, шестая доля 2 и двенадцатая 1; и если их сложить вместе, то получится 16, что больше, чем исходное 12; и его доли превосходят целое. [4] И число 24 имеет доли половинную, третью, четвёртую, шестую, восьмую, двенадцатую и двадцать четвёртую, каковые суть 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1; и сложенные вместе, они дают 36, и если сравнить этот результат с исходным числом 24, то обнаружится, что он будет большим, хотя и составлен только из его долей. В этом случае доли опять превосходят целое.

ГЛАВА XV

[1] Недостаточное число противоположно по своим качествам рассмотренному выше, и сумма его долей будет меньше самого числа, – как если бы у живого существа было меньше членов, чем ему положено по природе, и кто-то был бы одноглазым: «на лице по единому круглому глазу имели»,[28] или одноруким, или у него на руке было меньше 5 пальцев, или не было языка, или не доставало какого-либо иного члена. И подобно тому, как он может быть назван увечным и ущербным, так и число, доли которого в сумме будут меньше,

---

[27] Гомер, *Одиссея* XII, 85.

[28] Гесиод, *Теогония* 145.

чем оно само; а таковы, к примеру, числа 8 или 14. Ведь 8 имеет половинную, четвёртую и восьмую доли, то есть 4, 2, 1; сложенные вместе, они дают 7, что меньше исходного числа; и его долей недостаёт, чтобы составить целое. [2] Так же и 14 имеет половинную, седьмую и четырнадцатую доли, то есть 7, 2, 1, в сумме 10, что меньше исходного числа; и ему тоже не достаёт долей, чтобы составить из них целое.

ГЛАВА XVI

[1] В то время как эти два вида противоположны друг другу как крайности, посредине между ними находится так называемое совершенное число, проявляющееся в равенстве, и когда его доли сложены вместе, число оказывается не большим и не меньшим своих долей, но равным им.[29] Ведь равное всегда рассматривается как промежуточное между большим и меньшим, и является средним между избытком и недостатком, и средним между высоким и низким звуком.[30]

[2] И когда всё число по сравнению со своими долями, составленными и сложенными вместе, оказывается не превосходящим их и не превзойдённым ими, тогда оно называется совершенным в собственном смысле, как равное своим долям. Таковы числа 6 и 28; ведь 6 имеет доли половинную, третью, шестую, то есть 3, 2, 1, и составленные вместе, они дают 6, равное исходному числу, но не большее и не меньшее; и число 28 имеет доли половинную, четвёртую, седьмую, четырнадцатую и двадцать восьмую, то есть 14, 7, 4, 2, 1, и все вместе они дают 28, так что все доли не превышают целое и целое не превышает доли, но их сравнение даёт равенство, то есть видовое свойство совершенного.

[3] Прекрасные и благородные вещи обычно редки и легко перечислимы, тогда как безобразные и плохие – многочисленны; вот и избыточные и недостаточные числа отыскиваются в большом количестве и беспорядочно, так что способ их нахождения неупорядочен, в то время как совершенные числа легко перечислимы и расположены в надлежащем порядке. Ведь среди однозначных чисел имеется одно такое число 6, второе число 28 – единственное среди десятков, третье число 496 – единственное среди сотен, а четвёртое число 8128 – среди тысяч, если ограничиться десятью тысячами. И присущее им свойство состоит в том, что они попеременно оканчиваются то на шестёрку, то на восьмёрку,[31] и все являются чётными.[32]

[29] Ср. Евклид, *Начала* VII, опр. 22: «Совершенное число есть равное своим долям».

[30] Отсылка к теории музыкальной гармонии.

[31] Хотя все чётные совершенные числа оканчиваются на 6 или 8, что легко доказывается перебором возможных последних цифр для 2^n, но чередования этих двух окончаний в общем случае нет.

[32] До сих пор не доказано, что нечётных совершенных чисел не существует.

[4] Изящный и надёжный способ их получения, не пропускающий ни одного совершенного числа [33] и дающий одни только совершенные числа, состоит в следующем.[34]

Расположи все чётно-чётные числа, начиная с единицы, в один ряд, продолжая его так далеко, насколько пожелаешь: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096. Затем складывай их последовательно, прибавляя каждый раз по одному, и после каждого прибавления смотри на результат; и когда он будет первичным и несоставным, умножь его на последнее прибавленное число, в результате чего ты всегда будешь получать совершенное число. Если же он будет вторичным и составным, умножать не надо, но надо прибавить следующее число и посмотреть на результат; если он снова окажется вторичным и составным, снова пропусти его и не умножай, но прибавь следующее; но если он будет первичным и несоставным, то умножив его на последнее прибавленное число, ты снова получишь совершенное число, и так до бесконечности. Так ты получишь все совершенные числа по порядку, не пропустив ни одного из них.

К примеру, к 1 я прибавляю 2 и смотрю, какое число получилось в сумме, и нахожу, что это число 3, первичное и несоставное в согласии с тем, что говорилось выше,[35] поскольку оно не имеет разноимённых с ним долей, но только названную по нему долю; теперь я умножаю его на последнее прибавленное число, которое есть 2, и получаю 6; и я объявляю его первым на деле совершенным числом, имеющим такие доли, что они, будучи составленными вместе, укладываются в самом числе: ведь единица является его соимённой, то есть шестой, долей, и 3 является половиной в соответствии с числом 2, и обратно, двойка является третью.

[5] Число 28 получается этим же способом, когда следующее число 4 прибавляется к уже сложенным выше. Ведь три числа 1, 2, 4 в сумме дают число 7, которое будет первичным и несоставным, поскольку оно имеет только названную по нему седьмую долю; а потому я умножаю его на последнее количество, прибавленное к сумме, и мой результат составляет 28, равное своим долям, и имеющее доли, названные по уже упомянутым числам: половинную для четырнадцати, четвёртую для семёрки, седьмую для 4, четырнадцатую в противоположность половине, двадцать восьмую в соответствии с собственным названием, а такая доля для всех чисел равна единице.

[6] И когда уже открыты в единицах 6 и в десятках 28, ты можешь проделать то же самое и далее.

[7] Вновь прибавь следующее число 8, и получишь 15; рассматривая его, я выясняю, что оно не является первичным и несоставным, потому что в дополнение к названной по нему доле оно имеет разноимённые с ним доли, пятую и третью; поэтому я не умножаю его на 8, но прибавляю следующее

[33] То, что этот способ действительно не пропускает ни одного чётного совершенного числа, доказал Леонард Эйлер.

[34] Ср. Евклид, *Начала* IX, 36.

[35] См. I 11, 2.

число 16 и получаю число 31. Оно является первичным и несоставным, а потому его нужно, в соответствии с общим правилом, умножить на последнее добавленное число 16, в результате чего получится 496 в сотнях; а затем получится 8128 в тысячах; и так далее, насколько будет желание продолжать.

[8] А единица является совершенным числом в возможности, но не на деле: ведь она начинает ряд и входит в сумму согласно правилу, и я нахожу её первичной и несоставной, но это истинно не по причине соучастия, как для остальных чисел, а потому, что она является первоначалом всех чисел и единственным несоставным числом. [9] Я умножаю её на последнее добавленное число, то есть на неё саму, и получаю единицу; ведь единожды один будет один. [10] И эта единица является совершенным числом в возможности: ведь она в возможности равна своим частям, тогда как остальные – на деле.

ГЛАВА XVII

[1] После того, как мы рассмотрели количество само по себе, обратимся к соотнесённому количеству. [2] Для соотнесённого количества наивысшим родовым делением является деление на равенство и неравенство: ведь всё, что рассматривается в отношении к чему-то другому, будет либо равным, либо неравным, а третьего здесь нет.

[3] Теперь рассмотрим равенство, когда одна из сравниваемых вещей ни на какую разницу не превосходит другую и не превосходится ею, каковы сто и сто, или десять и десять, или два и два, или мина и мина, или талант и талант, или локоть и локоть, и прочие виды количества, будь то объём, длина или вес. [4] И как видовое свойство, это отношение равенства само по себе уже не делится и не подразделяется, будучи первичным и не подверженным разделению. Ведь не существует того или иного вида равенства, но всё равное равно одинаковым образом. [5] И всё, что является равным, имеет одно и то же название, и у него нет синонимов, как у «друга», «приятеля» и «товарища», но оно называется «равным»: ведь равное и есть равное.

[6] С другой стороны, неравное подлежит разделению, и одно будет большим, а другое меньшим, и эти антонимы противоположны друг другу и по количеству, и по свойствам. Ведь большее больше чего-то другого, а меньшее будет меньше в сравнении с чем-то другим, и имена здесь не одинаковые, но различные, так же как и у отца и сына, бьющего и битого, учителя и ученика, и в других подобных случаях.

[7] И далее, большее подразделяется на пять видов, каковые суть многократное (πολλαπλάσιον), сверхчастное (ἐπιμόριον), сверхмногочастное (ἐπιμερές), многократно-и-сверхчастное (πολλαπλασιεπιμόριον), многократно-и-сверхмногочастное (πολλαπλασιεπιμερές).

[8] И противоположное, меньшее, схожим образом подразделяется на пять видов (как целому соответствует целое и меньшее большему, так и эти виды соответствуют уже названным с прибавлением приставки ὑπὸ); и эти виды суть обратное многократному (ὑποπολλαπλάσιον), обратное сверхчастному (ὑπεπι-

μόριον), обратное сверхмногочастному (ὑπεπιμερές), обратное многократно-и-сверхчастному (ὑποπολλαπλασιεπιμόριον) и обратное многократно-и-сверхмногочастному (ὑποπολλαπλασιεπιμερές).

ГЛАВА XVIII

[1] И ещё раз, многократное представляет собой самый первый и по природе исходный вид большего, и мы это прямо сейчас увидим; и оно является числом, которое, если рассматривать его в отношении к другому числу, содержит его в себе целиком более чем один раз. К примеру, в сравнении с единицей все последовательные числа, начиная с двойки, образуют идущие по порядку виды многократного; на первом месте стоит 2, и оно является двукратным и называется так же, и 3 является трёхкратным, 4 – четырёхкратным, и так до бесконечности; ведь «более чем один раз» означает дважды, трижды и так далее, сколько будет угодно.

[2] Соответственно этому, обратное многократному по своей природе является первичным видом меньшего как одного из двух разделов неравного, и оно является числом, которое, если его сравнивать с большим, может нацело уложиться в нём более чем один раз, то есть дважды и так далее до бесконечности. [3] И если оно измеряет сравниваемое с ним большее дважды, то тогда оно называется обратным двукратному, каково 1 для 2; если три раза – обратным трёхкратному, каково 1 для 3; если четыре раза – обратным четырёхкратному, каково 1 для 4; и так далее.

[4] И подобно тому, как каждый из этих двух родов, многократное и обратное многократному, простирается до бесконечности, точно так же можно видеть, как каждый их раздел и вид по своей природе тоже уходит в бесконечность. Ведь двукратное, начиная с 2, проходит по всем чётным числам, когда мы поочерёдно берём числа из натурального ряда; и чётные числа могут быть названы двукратными в сравнении с чётными и нечётными[36] числами, последовательно идущими за единицей.

[5] Трёхкратным будет каждое третье по порядку число, если пропустить первые два, каковы числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24. Им присуще поочерёдно быть нечётными и чётными; и каждое из них является трёхкратным по отношению к числам, последовательно идущим за единицей, – так далеко, насколько захочется.

[6] Четырёхкратным будет каждое четвёртое по порядку число, если пропустить первые три, каковы числа 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32 и так далее. И они четырёхкратны по отношению к числам, последовательно идущим за единицей, насколько это будет угодно. Всем им присуще быть чётными; и они получаются, если брать через одно числа из уже полученного ряда чётных чисел. Ведь необходимо, чтобы все чётные числа были двукратными, через одно –

[36] Здесь словосочетание «чётные и нечётные» означает «все натуральные числа».

четырёхкратными, через два – шестикратными, через три – восьмикратными, и этот порядок продолжается до бесконечности.

[7] Пятикратные числа отыскиваются через четыре, будучи друг от друга пятыми по счёту, и они пятикратны по отношению к числам, последовательно идущим за единицей, и являются поочерёдно нечётными и чётными, как и трёхкратные.

ГЛАВА XIX

[1] Вторым видом большего, равно по природе и по порядку, является сверхчастное, которое содержит в себе сравниваемое с ним целое и ещё одну его долю.

[2] Если эта доля является половиной, то больший из сравнимых членов называется полуторным, а меньший – подполуторным; если третей частью, то члены называются сверхтретьим и подсверхтретьим, и если ты последуешь дальше, названия всегда будут согласовываться с этим принципом, так что эти виды будут уходить в бесконечность, хотя они и так уже являются видами бесконечного рода.

И получается так, что у первого из них, полуторного, в качестве второго члена отношения берутся последовательные чётные числа, начиная с двойки, и никакие другие, а в качестве первого члена отношения берутся последовательные трёхкратные числа, начиная с тройки, и никакие другие. [3] А соединяются они по порядку: первый с первым, второй со вторым, третий с третьим – 3 к 2, 6 к 4, 9 к 6, 12 к 8, – и вообще соответственные с соответственными.

[4] Собравшись рассмотреть второй вид сверхчастного, сверхтретье (поскольку по природе за половиной идёт треть), мы определим его так: число, содержащее в себе сравниваемое с ним целое и вдобавок третью долю этого целого. Мы получим его образцы, если соотнесём четырёхкратные числа, начиная с четвёрки, с трёхкратными, начиная с тройки, соединив их по порядку – 4 к 3, 8 к 6, 12 к 9, и так до бесконечности. [5] И ясно, что противоположное сверхтретьему, произносимое с приставкой ὑπὸ и называемое подсверхтретьим, есть такое, которое укладывается в целом вместе со своей третью, как 3 к 4, 6 к 8, 9 к 12 и прочие пары чисел, стоящие на одинаковых местах в обоих рядах.

[6] И далее наблюдается изящная последовательность, в которой первые члены, так называемые коренные числа (πυθμένι), стоят друг за другом в натуральном ряду, а вторые члены меньше первых на единицу: трём соответствует два, четырём – три, пяти – четыре, и так далее, сколько будет угодно. [7] А доля, по которой называется всякое сверхчастное, обнаруживается в нижнем из коренных чисел, а не в большем.

[8] Так что по природе, а не по нашему установлению, многократное является первоначальным и старейшим по сравнению со сверхчастным, устройство которого более запутано. И здесь для простоты показа нам следует расположить рассмотренные выше виды многократного в упорядоченные параллельные ряды: сперва двукратные числа в один ряд, на втором месте трёхкратные, на третьем месте четырёхкратные и так до десятикратных, чтобы мы могли

исследовать их порядок, их хитросплетение, их искусную последовательность, и какие из них по природе являются первичными, а также установить другие приятные и изящные свойства этих чисел. [9] В результате получится такая таблица:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	43	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

[10] В первом ряду расположены натуральные числа, начиная с единицы, а затем по порядку – требуемые виды многократного.

[11] И за первыми рядами, начинающимися с единицы и идущими в форме буквы Г в ширину и в глубину, следуют вторые ряды, имеющие своим началом четвёрку и также идущие в форме буквы Г, и многократные согласно первому виду многократного, то есть двукратные. И первый член [второго ряда] отличается от первого члена [первого ряда] на единицу, второй от второго на двойку, третий от третьего на тройку, следующий на четвёрку, следующий на пятёрку, и можно обнаружить, что этот порядок сохраняется и далее.

Третьи ряды в обоих направлениях начинаются с девяти, их общего начала; и они будут трёхкратными по отношению к членам первого ряда, согласно второму виду многократного; и в обоих направлениях эти ряды будут идти от тройки, пересекаясь в форме буквы Х. [12] Разность же [с первыми рядами] здесь будет нарастать по природе чётных чисел, и у первых она будет равна двойке, у следующих – четвёрке, у третьих – шестёрке; и эту разность между рассматриваемыми рядами природа обустроила для нас сама, как это видно из таблицы.

[13] Четвёртые ряды, у которых общим началом для обоих направлений будет 16, идут от четвёрок и пересекаются в форме буквы Х, и представляют третий вид многократного, то есть четырёхкратное в сравнении с первыми рядами, когда сравнивается первое число с первым, второе со вторым, третье с третьим и так далее. И разности у этих чисел суть три, шесть, затем девять, затем двенадцать, и эти количества с каждым шагом нарастают на тройку. Сами эти числа находятся в таблице на местах, предшествующих четырёхкратным числам, – и в следующих видах многократного эта аналогия всегда сохраняется.

[14] В сопоставлении со вторыми рядами, имеющими общим началом 4 и идущими от двоек в форме буквы Х по обоим направлениям, следующие по порядку ряды дают при соотнесении соответственных членов первый вид сверхчастного, а именно полуторное. Так, по божественной природе, а не по нашему договору или соглашению, сверхчастные имеют более позднее происхождение, нежели многократные. К примеру, таковы 3 к 2, 6 к 4, 9 к 6, 12 к 8,

15 к 10 и так далее. И в качестве разностей они имеют последовательные числа, начиная с единицы, как и те, что стоят перед ними.

[15] Сверхтретьи же, будучи вторым видом сверхчастного, идут по порядку, начиная с 4 к 3, 8 к 6, 12 к 9, 16 к 12, и также имеют упорядоченное возрастание разностей. [16] И в прочих многократных и сверхчастных сопряжениях ты также можешь видеть, что результаты будут согласованы и не противоречивы до бесконечности.

[17] Следующее свойство таблицы будет не менее строгим. Члены по углам являются единицами: в начале – простая, в конце – для третьего разряда, и для второго разряда – две оставшиеся; так что произведения двух первых и двух оставшихся равны. [18] Более того, по обоим направлениям имеется одинаковое возрастание от единицы до десяти, и по обеим противоположным сторонам – от десяти до сотни.

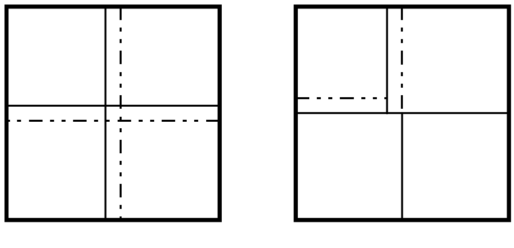
[19] И все диагональные члены от единицы до сотни являются квадратными равно-равными числами. А все те, что стоят рядом с ними с обеих сторон, являются гетеромекными (ἑτερομήκης), то есть такими, у которых стороны не равны, но разнятся между собой на единицу. И сумма двух последовательных квадратных чисел и двух средних между ними гетеромекных чисел всегда является квадратным числом. И наоборот, два последовательных гетеромекных числа и удвоенный квадрат между ними всегда дают в сумме квадратное число.[37]

[20] Честолюбивый человек может обнаружить в этой таблице много других замечательных свойств, о которых у нас нет сейчас времени говорить, потому что заниматься этим во *Введении* неуместно, и нам следует вернуться к нашему предмету. Ибо после двух родовых свойств многократного и сверхчастного, а также двух им противоположных, с приставкой ὑπὸ, то есть обратного многократному и обратного сверхчастному, в большем из неравного имеется сверхмногочастное, а в меньшем – обратное сверхмногочастному.

ГЛАВА XX

[1] Сверхмногочастное сопряжение получается, когда число в сравнении с другим содержит его в себе как целое, а вдобавок – более одной его доли; и «более одной» начинается с 2 и далее проходит по всем числам подряд. И корень сверхмногочастного получается, когда сравниваемое содержит в себе це-

[37] Изобразим оба этих утверждения на схеме:



лое с добавлением двух его долей, и этот вид называется «сверхдвухчастное»; [38] а если к целому добавляются три части, такой вид называется «сверхтрёхчастное»; а затем идут «сверхчетырёхчастное», «сверхпятичастное», и так далее до бесконечности.

[2] «Доли» [39] имеют свой корень и начало в числе три, ибо в этом случае невозможно начать с половины. Ведь если мы предположим, что некоторое число содержит в себе 2 половины сравниваемого, помимо целого, нам сразу же придётся говорить о многократном, а не о сверхмногочастном, потому что 2 половины вместе с целым дают двукратное начальное число. Поэтому нужно начать с 2 третей, затем идёт 2 пятых, затем 2 седьмых, затем 2 девятых, и так надо идти по нечётным числам; ведь отношение 2 четвёртых, к примеру, будет половиной, и 2 шестых – третью, и так будут получаться сверхчастные, а не сверхмногочастные, но этого нам не предлагалось делать, да оно и не согласуется с систематическим построением.

[3] Вслед за сверхмногочастным сразу же получается и обратное ему, то есть такое число, которое укладывается в сравниваемом с ним как целое с добавлением нескольких его долей: 2, 3, 4, 5 и так далее.

ГЛАВА XXI

[1] Порядок обоих видов и их регулярное происхождение обнаруживаются, когда мы расставим в ряд чётные и нечётные числа, начиная с тройки, и сопоставим с ними одни только нечётные числа, начиная с пятёрки. И первое к первому будут 5 к 3, второе ко второму – 7 к 4, третье к третьему – 9 к 5, четвёртое к четвёртому – 11 к 6, и далее в этом же порядке, сколь будет угодно. И таким образом расположатся виды сверхмногочастного и обратного ему, согласно коренным числам: первым – сверхдвухчастное, затем – сверхтрёхчастное, сверхчетырёхчастное, сверхпятичастное и так далее. А вслед за коренными числами каждого вида все прочие могут быть получены удвоением обоих членов, или утроением, и вообще умножением согласно общему виду многократного.

[2] И видно, что, когда целое дополняется двумя долями, этому подчиняется третье, а тремя – четвёртое, а четырьмя – пятое, а пятью – шестое, и так до бесконечности, так что порядок имён получается таким: «превышающее на две трети», «превышающее на три четверти», «превышающее на четыре пятых», затем «превышающее на пять шестых», и так далее.

[38] Сверхдвухчастное, как род, включает в себя виды с корневыми отношениями 5 к 3, 7 к 5, 9 к 7, 11 к 9 и т. д.; аналогично сверхтрёхчастное – 7 к 4, 8 к 5, 10 к 7, 11 к 8 и т. д. (здесь пропускаются знаменатели, кратные трём); и так далее по аналогии.

[39] Во множественном числе.

Коренные числа	5	3	7	4	9	5	11	6
	10	6	14	8	18	10	22	12
	15	9	21	12	27	15	33	18
	20	12	28	16	36	20	44	24
	25	15	35	20	45	25	55	30
	30	18	42	24	54	30	66	36
	35	21	49	28	63	35	77	42
	40	24	56	32	72	40	88	48
	45	27	63	36	81	45	99	54

[3] Итак, свойства соотнесённых по количеству простых и несмешанных сопряжений уже рассмотрены выше. Те же, что составляются из них, когда два объединяются в одно, таковы: для первых членов отношения это многократно-и-сверхчастное, а также многократно-и-сверхмногочастное; а для вторых членов отношения они незамедлительно возникают из первых с добавлением к имени приставки ὑπὸ, и это для многократно-и-сверхчастного – обратное ему, и для многократно-и-сверхмногочастного – обратное ему. И в подразделении рода виды одного будут соответствовать видам другого, с добавлением в имени приставки ὑπὸ.

ГЛАВА XXII

[1] Многократно-и-сверхчастное – это такое сопряжение, когда больший из сравниваемых членов содержит в себе меньший член, взятый более чем один раз, и вдобавок какую-нибудь одну его долю. [2] Будучи составным, такое число будет иметь сложное имя по каждой из составляющих: ведь многократно-и-сверхчастное получается составлением многократного и сверхчастного, и его разнообразные и переменчивые разновидности будут подразделяться по наименованиям как первой части, так и второй. К примеру, по первому многократному они могут быть двукратными, трёхкратными, четырёхкратными, пятикратными и так далее; а по второму родовому сверхчастному его видами могут быть полуторное, сверхтретье, сверхчетвертное, сверхпятерное, и так далее. А когда они составляются вместе, получается такой порядок: двукратное с половиной, двукратное с третью, двукратное с четвертью, двукратное с пятой долей, двукратное с шестой долей и далее по аналогии; начиная ещё раз: трёхкратное с половиной, трёхкратное с третью, трёхкратное с четвертью, трёхкратное с пятой долей; и опять: четырёхкратное с половиной, четырёхкратное с третью, четырёхкратное с четвертью, четырёхкратное с пятой долей; и опять: пятикратное с половиной, пятикратное с третью, пятикратное с четвертью, пятикратное с пятой долей; и аналогичные ряды, уходящие до бесконечности. Сколько раз большее содержит меньшее как целое, так и называется первая часть составного отношения во многократно-и-сверхчастном; и какова доля, входящая в большее в дополнение к несколько раз взятому целому, так и называется второй вид отношения в составном многократно-и-сверхчастном.

[3] Вот примеры этому: 5 к 2 есть двукратное с половиной, 7 к 3 – двукратное с третью, 9 к 4 – двукратное с четвертью, 11 к 5 – двукратное с пятой долей. Ты и далее всегда можешь получать их по порядку, соотнося чётные и нечётные числа, начиная с двойки, с одними только нечётными числами, начиная с пятёрки: первое с первым, второе со вторым, третье с третьим, и далее соответственное с соответственным.

И если взять все чётные числа по порядку, начиная с двойки, и соотнести с ними все члены ряда, который начинается с пятёрки и идёт с разностью в пятёрку, то все они дадут двукратное с половиной. И если взять все члены ряда, который начинается с тройки и идёт с разностью в тройку, а таковы 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, и ещё взять члены другого ряда, который начинается с семёрки и идёт до бесконечности с разностью в семёрку, а таковы 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, и затем соотнести члены этих рядов как больший с меньшим – первый с первым, второй со вторым, третий с третьим, четвёртый с четвёртым, и так далее, – то они дадут второй упорядоченный вид, двукратное с третью. [4] И снова, если взять простой ряд четырёхкратных чисел, каковы 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, и соотнести с ним другой ряд, который начинается с девятки и идёт с разностью в девятку, а таковы числа 9, 18, 27, 36, 45, 54, то у нас появится ещё один упорядоченный вид многократно-и-сверхчастного, двукратное с четвертью; и всякий может по желанию продолжать его бесконечно.

[5] Второй вид начинается с трёхкратного с половиной, каковы 7 к 2, 14 к 4, и вообще числа из прогрессии семёрки, отнесённые к расположенным по порядку чётным числам, начиная с двойки. [6] И снова, 10 к 3 есть первое трёхкратное с третью, 20 к 6 – второе трёхкратное с третью, и далее упорядоченные десятикратные соотносятся с упорядоченными трёхкратными.

И мы можем увидеть это с большой точностью и определённостью в построенной выше таблице. Ведь по отношению к первому ряду все последующие ряды, взятые как целое к целому, дают последовательные виды многократного до бесконечности, когда все они сравниваются с первым. И когда каждый ряд последовательно соотносится с расположенным под ним рядом, причём в качестве начального берётся нижний ряд, то порождаются все последовательные виды сверхчастного.[40] И когда мы начинаем с третьего ряда и соотносим со следующими за ним по порядку рядами взятые по порядку ряды нечётных чисел, начиная с пятого, мы получаем все виды сверхмногочастного в их собственном порядке.[41] В случае многократно-и-сверхчастного естественный порядок соотнесений таков, что если мы начинаем со второго ряда, то с его членами мы будем соотносить числа из пятого ряда, первое с первым, и второе со вторым, и третье с третьим, и так далее; а с третьим рядом будем соотносить седьмой, с четвёртым – девятый, и далее в соответственном порядке так далеко, насколько пожелаем.[42]

[40] Ср. I 19, 14–15.

[41] Ср. I 21, 1.

[42] Ср. I 22, 3–4.

[7] И ясно, что если меньшие члены будут отнесены к большим, то получатся соответственные названия, только с приставкой ὑπὸ.

ГЛАВА XXIII

[1] Многократно-и-сверхмногочастное представляет собой оставшееся сопряжение чисел. Этот вид, а также тот, который получается из него с добавлением приставки ὑπὸ, образуется, когда число содержит в себе другое число как целое более чем один раз (дважды, трижды, или сколько-нибудь раз ещё), и вдобавок более чем одну долю этого числа, то есть 2, 3, 4, 5 и так далее. [2] Эти доли не являются половинами по уже названной причине,[43] но они могут быть третьей, четвёртой, пятой и так далее.

[3] Из сказанного выше нетрудно понять, каковы будут его виды, поскольку они различаются схожим и неизменным образом: двойное с добавлением двух долей, двойное с добавлением трёх долей, двойное с добавлением четырёх долей, и далее по аналогии. К примеру, двойным с добавлением двух долей будут 8 к 3, 16 к 6, и вообще числа, идущие от восьмёрки с разностью восемь, отнесённые к числам, идущим от тройки с разностью три. И в прочих видах можно установить их последовательность, согласно тому, что уже было сказано. А те, в которых сравниваемые члены меняются местами, получаются из названных как антонимы с добавлением к ним приставки ὑπὸ.

[4] На этом мы завершаем в этом первом *Введении* рассмотрение десяти числовых сопряжений. И этот стройный и необходимый путь к познанию природы Вселенной ясным и недвусмысленным образом показывает нам, что прекрасное, определённое и познаваемое первично по своей природе в сравнении с неопределённым, неограниченным и безобразным; и далее, что части и виды неограниченного и неопределённого приобретают благодаря первому свою форму и границы, и находят подобающий им порядок и расположение, и становятся доступными измерению, и приобретают некоторое подобие и одноимённость. Ведь понятно, что разумная часть души приводит в порядок неразумную часть, её порывы и влечения, связанные с двумя видами неравенства, и посредством размышления подводит её к равенству и тождеству. [5] А для нас из этого уравнивания прямо вытекают так называемые нравственные добродетели, каковые суть благоразумие, мужество, мягкость, самообладание, выдержка и подобные им качества.

[6] Теперь нам нужно как следует рассмотреть природу этой теоремы. А именно, можно доказать, что все виды неравенства и их подразделения сводятся к первому и единственному равенству, как к их матери и корню.

[7] Пусть нам даны равные числа по три,[44] и первыми будут единицы, затем три двойки, затем тройки, четвёрки, пятёрки, и сколь угодно далее. И из них,

---

[43] Ср. I 20, 2.

[44] Ср. Евклид, *Начала* V, опр. 8: «Пропорция из трёх членов является наименьшей возможной».

прямо-таки по божественному, а не по человеческому повелению, а иначе сказать – по самой природе, первыми возникают многократные, а из них сперва двукратные, затем трёхкратные, затем четырёхкратные, затем пятикратные, и этот порядок мы можем продолжать до бесконечности. Вторыми же – сверхчастные, и здесь сначала появляется первый вид, полуторное, за ним сверхтретье, а за ним прямо по порядку идут сверхчетвертное, сверхпятерное и далее аналогично до бесконечности. Третьими – сверхмногочастные, и здесь сначала появляются сверхдвухчастные, а прямо за ними сверхтрёхчастные, сверхчетырёхчастные, сверхпятичастные, и сколь угодно далее в том же порядке.

[8] И тебе нужны такие правила, которые будут подобны неизменным и нерушимым законам природы, и по которым всё вышеназванное будет расходиться во все стороны от равенства без каких-либо исключений. И эти правила таковы: «Положи первый член равным первому, второй равным сумме первого и второго, а третий – сумме первого, удвоенного второго и третьего».[45] И если ты будешь действовать по этому закону, ты сначала получишь по порядку все виды многократного, исходя из трёх членов равенства, и они взойдут и вырастут без твоей помощи и участия; причём непосредственно из равенства возникнет двукратное, затем из двукратного трёхкратное, затем из трёхкратного четырёхкратное, а из него пятикратное, и так далее всегда в том же порядке.

[9] А из этих многократных, если переставить их члены, прямо-таки по природной необходимости применением этих же трёх правил возникают сверхчастные, причём не случайно и беспорядочно, но в присущей им последовательности. И из переставленного первого двукратного возникает первое полуторное, из второго трёхкратного – второе в своём порядке сверхтретье, и сверхчетвертное из четырёхкратного, и далее названные по именам следующих.

[10] И опять, из этих упорядоченных сверхчастных, если переставить их члены, естественно возникают сверхмногочастные: из полуторного – сверхдвухчастное, из сверхтретьего – сверхтрёхчастное, из сверхчетвертного – сверхчетырёхчастное, и далее до бесконечности по этой же аналогии.[46]

[11] А если члены не переставлять, то прямо из этих же упорядоченных сверхчастных по тем же правилам возникают многократно-и-сверхчастные: двукратное-и-половинное из первого полуторного, двукратное-и-сверхтретье из второго сверхтретьего, двукратное-и-сверхчетвертное из третьего сверхчетвертного, и так далее.

[12] Итак, из сверхчастных с перестановкой членов возникают сверхмногочастные, а без перестановки – многократно-и-сверхчастные, и это происходит одним и тем же способом и по одним и тем же правилам, но либо с сохранени-

---

[45] Из непрерывной пропорции $a : b : c$ по указанному правилу получается новая непрерывная пропорция $a : (a + b) : (a + 2b + c)$; а если производится перестановка членов, то новая непрерывная пропорция будет иметь вид $c : (b + c) : (a + 2b + c)$.

[46] Имеются в виду «максимальные» сверхмногочастные, в которых не достаёт одной доли до двукратного, то есть превышающие на $2/3$, $3/4$, $4/5$, $5/6$ и т. д.

ем порядка членов, либо с обращением его, и получившиеся числа показывают остальные сопряжения.

[13] Описанное выше упорядоченное производство, идущее либо в прямом порядке, либо с перестановкой членов, мы рассмотрим теперь на примерах.

[14] Из сопряжения и пропорции полуторного, переставленного так, чтобы оно начиналось с большего члена, составляется сверхмногочастное сверхдвухтретье сопряжение; а если оно прямо начинается с меньшего члена, то получается многократно-и-сверхчастное сопряжение, а именно двукратное-и-половинное. К примеру, из 9, 6, 4 получается 9, 15, 25 либо 4, 10, 25. Из сверхтретьих, когда они начинаются с большего члена, в сверхмногочастном получается триждысверхчетвертное, а когда с меньшего – двукратное-и-сверхтретье. К примеру, из 16, 12, 9 получается 16, 28, 49 либо 9, 21, 49. Из превышающих на четверть, когда они начинаются с превосходящего члена, в сверхмногочастном получается четыреждысверхпятерное, а когда с меньшего члена, то во многократно-и-сверхчастном получается двукратное-и-сверхчетвертное. К примеру, из 25, 20, 16 получается 25, 45, 81 либо 16, 36, 81.

[15] И в том, что получается обоими способами, последний член всегда является одним и тем же квадратом, а первый оказывается наименьшим, и оба крайних всегда являются квадратами.

[16] А относящиеся к другим видам сверхмногочастные или многократно-и-сверхмногочастные получаются иным образом из сверхмногочастных. Так, из дваждысверхтретьих, когда они начинаются с меньшего члена, получаются двукратные-и-дваждысверхтретьи; а когда начинаются с большего – триждысверхпятерные. К примеру, из 9, 15, 25 получается либо 9, 24, 64, либо 25, 40, 64.

А из триждысверхчетвертных, когда они начинаются с меньшего члена, получаются двукратные-и-триждысверхчетвертные; а когда они начинаются с большего члена – четыреждысверхседьмые. К примеру, из 16, 28, 49 получаются либо 16, 44, 121, либо 49, 77, 121.

[17] И также из четыреждысверхпятерных, каковы 25, 45, 81, когда они начинаются с меньшего члена, получаются двукратные-и-четыреждысверхпятерные, каковы 25, 70, 196: а когда они начинаются с большего члена – пятьюсверхдевятые, каковы 81, 126, 196. И аналогичные согласованные результаты можно продолжать до бесконечности.

КНИГА ВТОРАЯ

ГЛАВА I

[1] Элементом называется и является то последнее, из чего всё слагается и на что всё разлагается (к примеру, буквы являются элементами звучащей речи, ибо из них слагается произносимая речь и на них она в итоге разлагается; а звуки являются элементами мелодии, ибо из них она изначально слагается и на них разлагается; а так называемыми общими элементами всего космоса явля-

ются четыре простых тела: огонь, вода, воздух и земля, – ведь из них как из первых состоит вся природа, и на них же мы мысленно её в конце концов разлагаем).[47] Мы показали, что равенство является элементом для соотнесённого количества; а для количества самого по себе первоначальными элементами являются единица и двойка, из которых как из последних всё слагается до бесконечности и на которые мы мысленно всё разлагаем.

[2] Мы также показали, что распространение и нарастание неравного идёт от равенства, и что оно прямо упорядочено по всем сопряжениям согласно трём правилам.[48] И чтобы показать, что равенство поистине является элементом, осталось продемонстрировать, что разложение завершается на нём же. Рассмотрим для этого нашу процедуру.

ГЛАВА II

[1] Представь себе три члена в любом сопряжении и пропорции, будь оно многократным, или сверхчастным, или сверхмногочастным, ими многократно-и-сверхчастным, или многократно-и-сверхмногочастным, лишь бы только средний член относился к меньшему так же, как больший к среднему. Вычти меньший член из среднего, будь он по порядку первым или же последним, и установи меньший член первым членом твоей новой прогрессии; на второе место установи то, что осталось от второго члена после вычитания; а потом вычти сумму нового первого члена и удвоенного нового второго члена из оставшегося, наибольшего из данных членов, и установи разность третьим членом, – и получившиеся числа будут иметь некоторое новое сопряжение, более примитивное по природе. [2] И если ты снова таким же способом произведёшь вычитание этих трёх членов, ты обнаружишь, что они преобразуются в три новых члена более примитивного вида; и ты найдёшь, что эта последовательность будет всегда продолжаться, пока не дойдёт до равенства. А отсюда с необходимостью становится очевидным, что равенство является элементом для соотнесённого количества.

[3] Из этой теории вытекает элегантная теорема, чрезвычайно полезная по её приложению к Платоновскому учению о порождении души[49] и ко всем гармоническим интервалам. Ведь в этом учении нам прямо приходится устанавливать два полуторных отношения, либо три, либо четыре, либо пять и так до бесконечности; и два сверхтретьих, либо сверхчетвертных, либо сверхвосьмерных, либо других сверхчастных; и затем в каждом случае три, или четыре, или пять, и так далее. [4] И имеет смысл делать это не невежественно, безграмотно и с допущением ошибок, но искусно, уверенно и быстро, с помощью следующей процедуры.

---

[47] Ср. Аристотель, *Метафизика* 1014a26.

[48] См. I 23, 4.

[49] Платон, *Тимей* 35.

ГЛАВА III

[1] Каждое многократное будет стоять во главе такого числа соимённых с ним сверхчастных отношений, насколько само оно удалено от единицы, и никоим образом не большего и не меньшего.

[2] Двукратные отношения порождают полуторные: первое – одно, второе – два, третье – три, четвёртое – четыре, пятое – пять, шестое – шесть, и ни более ни менее, но обязательно получается, что сверхчастные по числу соответствуют производящим их многократным; и божественная хитрость обнаруживается в том числе, которое ограничивает их все, потому что оно по своей природе не имеет той доли, по которой шла прогрессия сверхчастных.

От трёхкратных происходят все сверхтретьи, соответствуя по числу их производящим, и эти прогрессии будут заканчиваться числом, которое не делится на три. И сверхчетвертные происходят от четырёхкратных, завершаясь, когда их прогрессия достигает числа, которое не делится на четыре.

[3] К примеру, когда двукратные производят соответствующие им по числу полуторные, то сначала многократные ставятся в ряд 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. И поскольку 2 является первым после единицы, то оно производит одно полуторное 3, которое не имеет половины, чтобы из него можно было получить ещё одно полуторное. И первое двукратное производит только одно полуторное, а второе, 4 – два полуторных; ведь оно даёт 6, а 6 даёт 9, а 9 уже ничего не даёт, потому что оно не имеет половины. И восемь, третье двукратное, даёт три полуторных, первым из него получается 12, вторым 18 из 12, третьим 27 из 18; четвёртое же не возникает по общему правилу, потому что 27 не делится пополам. И 16, четвёртое двукратное, производит четыре полуторных, 24, 36, 54 и, наконец, 81, так что их число обязательно равно порядковому номеру их породившего, поскольку 81 по природе не делится на две половины. И ты можешь обнаружить эту аналогию уходящей до бесконечности. Чтобы проиллюстрировать это, построим следующую таблицу двукратных:

Двухкратное отношение по горизонтали

	1	2	4	8	16	32	64	
		3	6	12	24	48	96	
			9	18	36	72	144	
Трехкратное				27	54	108	216	Полуторное
отношение по					81	162	324	отношение по
гипотенузе						243	486	вертикали
							729	

ГЛАВА IV

[1] Построим также аналогичную таблицу трёхкратных:

Трехкратное отношение по горизонтали

	1	3	9	27	81	243	729	
		4	12	36	108	324	972	
			16	48	144	432	1296	
Четырехкратное				64	192	576	1728	Сверхтретье
отношение по					256	768	2304	отношение по
гипотенузе						1024	3072	вертикали
							4096	

Здесь мы можем видеть, что первое число 3 порождает всего одно сверхтретье отношение 4, на котором подобное продвижение тут же прекращается: ведь 4 не делится на три, и не имеет сверхтретьего. Второе трёхкратное есть 9, и от него происходят только два сверхтретьих отношения, 12 к нему самому и 16 к 12. И 16 является последним в этой прогрессии, потому что оно не делится на три, и тем самым не имеет своего сверхтретьего. [2] Следующим по порядку трёхкратным идёт 27, на третьем месте от единицы в прогрессии трёхкратных 1, 3, 9, 27. Поэтому от него происходят только три сверхтретьих отношения, и не больше: первым является его собственное [сверхтретье] 36, вторым для этого – 48, и третьим для этого – 64, у которого уже нет третьей доли, и оно не имеет своего сверхтретьего. А четвёртое порождает четыре сверхтретьих отношения, и очевидно, что пятое – пять.

[3] Таков пример; и ты можешь построить такие же таблицы для прочих многократных, чтобы природа показала нам, как и в найденном прежде, что двукратные по рождению старше трёхкратных, трёхкратные – четырёхкратных, а они, в свою очередь, пятикратных, и так далее. Ведь если по ширине в верхнем ряду таблицы идёт двукратное нарастание, то и в следующих параллельных рядах также будет идти оно же, а вдоль диагональной гипотенузы образуется род, больший на единицу, то есть трёхкратный, и в параллельных линиях наблюдается он же. А когда по ширине идут трёхкратные, то во всех диагоналях идут четырёхкратные; а если эти будут четырёхкратными, то те – пятикратными; и так далее.[50]

---

[50] Такого рода таблицы имеют общий вид

1	a	a^2	a^3	a^4	...
	b	ab	a^2b	a^3b	...
		b^2	ab^2	a^2b^2	...
			b^3	ab^3	...
				b^4	...
					...

В специальных таблицах, рассматриваемых Никомахом, $b = a + 1$.

ГЛАВА V

[1] Объяснив, как составлением отношений производятся другие отношения, мы перейдём к оставшимся частям *Введения*.

[2] Первые два сверхчастных отношения, составленные вместе, порождают первое многократное отношение, а именно двукратное; ведь двукратное составляется из полуторного и сверхтретьего, и всякое полуторное и сверхтретье, если их составить вместе, непременно будут давать двукратное. К примеру, 3 есть полуторное для 2, и 4 – сверхтретье для 3; и для 2 двукратным будет 4, составленное из полуторного и сверхтретьего. И снова, 6 есть двукратное для 3, и между ними мы найдём такое число, которое обязательно будет давать с одним из них сверхтретье отношение, а с другим полуторное; и действительно, 4, которое лежит между 6 и 3, образует с 3 сверхтретье отношение, а с 6 – полуторное.

[3] И правильно сказано, что двукратное раскладывается на полуторное и сверхтретье, и когда составляются всякие полуторное и сверхтретье, обязательно получается двухкратное, так что два первых вида сверхчастного в составлении производят первый вид многократного.

[4] И ещё раз, этот первый вид многократного, составленный с первым видом сверхчастного, производит следующий по порядку вид того же рода, второе многократное, то есть трёхкратное. Ведь всякое двукратное и полуторное, составленные вместе, обязательно производят трёхкратное. К примеру, для 6 двукратным будет 12, а для него полуторным 18, и 18 будет напрямую трёхкратным для 6. Иначе говоря, если я в качестве среднего члена возьму не 12, а 9, полуторное для 6, при этом обнаружится неизменное согласие в результатах; ведь поскольку 18 будет двойным для 9, оно образует трёхкратное отношение с 6. Так, из полуторного и двукратного, первых видов сверхчастного и многократного, составляется смешением второй вид многократного, трёхкратное, и на эти виды оно всегда раскладывается. [5] Посмотри, ведь 6, которое является трёхкратным для 2, имеет среднее 3, которое представляет два отношения: полуторное для 2 и двухкратное для 6.

И если трёхкратное, которое является вторым видом многократного, составляется со сверхтретьим, которое является вторым видом сверхчастного, то оба они вместе порождают следующий вид многократного, то есть четырёхкратное, и оно обязательно раскладывается на эти два вида описанным выше способом. И четырёхкратное вместе со сверхчетвертным производят пятикратное, а оно вместе со сверхпятерным – шестикратное, и так далее. Таким образом, многократные, взятые по порядку от своего начала, вместе со сверхчастными, взятыми по порядку от своего начала, производят следующие за ними по порядку многократные. Ведь двукратное вместе с полуторным производит трёхкратное, трёхкратное вместе со сверхтретьим – четырёхкратное, четырёхкратное вместе со сверхчетвертным – пятикратное, и, продолжая эту последовательность далее, ты не обнаружишь никакого нарушения.

ГЛАВА VI

[1] До сих пор мы в основном вели речь о соотнесённом количестве, избирая подобающее и легко постижимое. То, что нам осталось сказать по этой теме, мы рассмотрим после, а пока отставим его в сторону, чтобы сперва рассмотреть другие полезные темы, касающиеся количества самого по себе, а не в отношении к другому. Ведь в математических теоремах одно всегда развивается и объясняется через другое. То, что мы должны первым делом рассмотреть и исследовать, относится к числам линейным, плоским и объёмным, кубическим и сферическим, равносторонним и разносторонним, к «плиткам», «балкам», «клиньям» и прочим, которые специально рассматриваются во *Введении в геометрию*,[51] как некоторым образом относящиеся к величине, но их семена относятся к арифметике, которая является матерью и прародительницей геометрии. Напомним, что совсем недавно мы показали, что с уничтожением арифметики уничтожаются все остальные знания, но сама она не уничтожается вместе с ними, и обратно, она по необходимости привносится с другими знаниями, но сама их не привносит.[52]

[2] Первым делом надо заметить, что всякая буква, которой обозначается число, как йота для десяти, каппа для двадцати, омега для восьмисот, обозначает его по человеческому установлению и договорённости, а не по природе. С другой стороны, природное, неискусственное, и тем самым простейшее обозначение числа получается, когда входящие в него единицы ставятся в ряд одна за другой. К примеру, запись одной единицы с помощью знака альфа будет обозначением для одного; две единицы рядом, то есть две альфы, будет обозначением двойки; три единицы в ряд будут характеризовать тройку, и четыре по прямой – четвёрку, пять – пятёрку и так далее. И с помощью одних только таких записей и обозначений можно прояснить схематическое устройство упомянутых выше плоских и телесных чисел. К примеру,

один	α
два	α α
три	α α α
четыре	α α α α
пять	α α α α α

и так далее.

[3] Единица, занимая место точки и имея её характер, служит началом интервалов и чисел, но сама не является ни интервалом, ни числом, так же как точка является началом линий и протяжений,[53] но сама не является ни линией, ни протяжением. Но когда точка составляется с точкой, это не даёт увеличения, ведь когда не имеющее размера составляется с не имеющим размера, никакого

[51] Это сочинение Никомаха до нас не дошло.

[52] См. I 4–5.

[53] Я перевожу διάστημα как «интервал», когда речь идёт о числовых отношениях, и как «протяжение», когда речь идёт о плоских и телесных размерностях в геометрии.

протяжения не возникает, и если кто-то к ничему прибавит ничто, то у него и получится ничто. Нечто схожее мы видели среди сопряжений в случае равенства; ведь пропорция здесь сохраняется, и первый член относится ко второму как второй к третьему, но крайние не образуют никакого интервала по отношению друг к другу, как это происходит для всех других сопряжений, за исключением равенства. И таким же образом единица, единственная из всех чисел, будучи умноженной на самое себя, не даёт ничего больше себя самой. Итак, единица не имеет размеров и является началом вида, а первое протяжение отыскивается и наблюдается в двойке, затем в тройке, затем в четвёрке и далее по порядку; ведь протяжение – это то, что видно между двумя пределами.

[4] Первое протяжение называется линией, ибо линия протяжена единожды. Два протяжения называются поверхностью, ибо поверхность протяжена дважды. Три протяжения называются телом, ибо тело протяжено трижды, и совершенно невозможно представить себе тело, которое имело бы более трёх протяжений, каковые суть глубина, ширина и длина. Поэтому говорят, что для каждого тела определены шесть направлений, по которым различаются движения с места на место: вперёд, назад, вверх, вниз, вправо, влево; и каждое протяжение обязательно включает два противоположных направления, одно – вверх и вниз, другое – вперёд и назад, третье – вправо и влево.

[5] Это утверждение допускает обращение. Если нечто является телом, то оно всегда имеет три протяжения – длину, глубину и ширину; и обратно, если нечто протяжено трижды, то оно всегда является телом, и ничем иным.

[6] А то, что имеет два протяжения, будет не телом, но поверхностью, ибо она имеет только два протяжения. И это утверждение также можно обратить. Говоря прямо, поверхность протяжена дважды; обратно же, если нечто протяжено дважды, то оно всегда является поверхностью.

[7] Тем самым поверхность превосходится телом на одно протяжение, и линия поверхностью – тоже на одно, ведь она есть то, что имеет одно протяжение и что протяжено лишь единожды, а телу она уступает двумя протяжениями. Точка же уступает линии на ещё одно протяжение, а потому она и была названа непротяжённой; и она уступает телу на три протяжения, поверхности – на два, линии – на одно.

ГЛАВА VII

[1] И точка – это начало протяжённого, но сама не протяжена, и она – начало линии, но сама не линия. А линия – начало поверхности, но сама не есть поверхность, и она – начало дважды протяжённого, но сама не протяжена дважды. [2] И поверхность – начало тела, но сама не есть тело, и она – начало трижды протяжённого, но сама не протяжена трижды.

[3] И точно так же среди чисел единица является началом всех чисел, которые следуют единица за единицей в одном направлении; и линейное число является началом плоского числа, которое располагается на плоскости в двух разных протяжениях; и плоское число является началом телесного числа, ко-

торое идёт в глубину в третьем протяжении. Отличие состоит в том, что линейные числа начинаются с двойки и получаются последовательным прибавлением единицы в одном протяжении; плоские числа начинаются с тройки как изначального корня и далее идут последовательно. Свои названия они получают в следующем порядке: первые суть треугольные, вторые – четырёхугольные,[54] третьи – пятиугольные, а затем шестиугольные, семиугольные и так до бесконечности. И как мы уже сказали, они именуются по последовательным числам, идущим за тройкой.

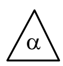
[4] И треугольник оказывается первичной и элементарной плоской фигурой; ведь если в ограниченных линиями плоских фигурах провести прямые от углов к центру, то всякая прямолинейная фигура разобьётся на треугольники, по числу равные сторонам, и только треугольник, если с ним проделать то же самое, не превратится ни во что иное, но останется самим собой. И для прочих [фигур] треугольник является элементом, ибо все они разрешаются в него, а он – ни во что иное. И все прочие составляются из него, а он – ни из чего иного. Поэтому он является элементом для других [фигур], а для него нет элементов. [5] И это утверждение подтверждается доводом, исходящим от плоских чисел.

ГЛАВА VIII

[1] Треугольным называется такое число, которое, будучи разложенным на единицы, может быть выложено на плоскости в форме равностороннего треугольника. К примеру, таковы числа 3, 6, 10, 15, 21, 28 и так далее; ведь они могут быть изображены схематически в виде равносторонних треугольников. И, продвигаясь дальше, ты найдёшь, что ряд треугольных чисел образуется, когда в качестве элементарной формы берётся та, которая вырастает из единицы, поскольку единица является треугольным числом в возможности, а первым настоящим треугольным числом будет 3.

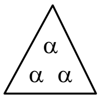
[2] Их стороны возрастают как последовательные числа, и стороной первого в возможности служит единица; а стороной настоящего первого служит двойка, а само оно есть 3; стороной настоящего второго служит тройка, а само оно есть 6; и у третьего сторона – четверка, у четвёртого – пятёрка, у пятого – шестёрка, и так далее.

[3] А производятся они из натурального ряда чисел путём последовательного прибавления его членов к уже имеющейся сумме, потому что последовательным составлением и прибавлением составляются последовательные треугольные числа. К примеру, из натурального ряда 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 я сначала беру первый член и получаю треугольное число, которое является первым в возможности, то есть единицу:

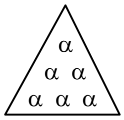


[54] В других случаях я перевожу τετράγωνον как «квадратное», но здесь желательно сохранить однообразие имён.

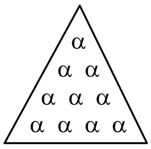
Прибавляя затем следующий член, я получу первое настоящее треугольное число, ведь 2 и 1 будет 3; а на схематическом чертеже оно составляется так, что под одной единицей в ряд расположены две единицы, и число 3 образует треугольник:



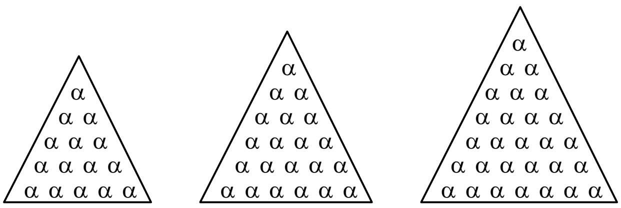
Затем, когда добавилось следующее по порядку число 3, разложенное на единицы, это дало 6, второе настоящее треугольное число, которое на схеме выглядит так:



И вновь, четвёртое в натуральном ряду число 4, добавленное к ним и разложенное на единицы, даёт следующее по порядку после уже названных число 10, которое изображается треугольником

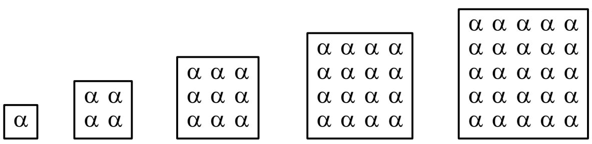


А затем прибавляется 5, потом 6, потом 7, и так все числа одно за другим, так что сторона каждого по порядку треугольника состоит из такого числа единиц, сколько чисел натурального ряда в этом треугольнике сложено:



ГЛАВА IX

[1] Четырёхугольное число есть следующее по порядку, и оно показывает нам на схеме уже не три угла, как предыдущее, но четыре, и точно так же является равносторонним. К примеру, таковы числа 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. В графическом представлении все эти числа являются равносторонними четырёхугольниками; и так будет сколь угодно долго.



[2] Этим числам, равно как и предыдущим, присуще то, что их стороны нарастают как числа натурального ряда. Ведь первое в возможности, один, имеет стороной единицу; и у первого настоящего числа 4 сторона – двойка; у второго настоящего числа 9 сторона – тройка; а у следующего за ним третьего настоящего числа 16 сторона – четвёрка; и у четвёртого – пятёрка, у пятого – шестёрка, и в общем всегда будет так.

[3] Это число получается также, если натуральный ряд чисел растянуть в линию, начиная с единицы, но брать теперь из него не все числа одно за другим, как это было раньше, но через одно, то есть только чётные. Ведь первое число 1 будет первым в возможности четырёхугольником; второе, 1 + 3, будет первым настоящим четырёхугольником; третье, 1 + 3 + 5, будет вторым настоящим четырёхугольником; четвёртое, 1 + 3 + 5 + 7, будет третьим настоящим четырёхугольником; и следующее получается прибавлением 9 к предыдущим числам, следующее за ним – прибавлением 11, и так далее.

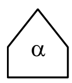
[4] И в этом случае сторона каждого по порядку четырёхугольника состоит из такого числа единиц, сколько чисел уже было в нём сложено.

ГЛАВА X

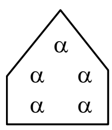
[1] Пятиугольное число есть такое, которое в разложении на единицы изображается пятиугольной равносторонней фигурой. Таковы числа 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 и аналогичные им.

[2] Каждая сторона первого настоящего пятиугольника 5 есть два, ведь единица есть сторона первого в возможности пятиугольника; и три есть сторона второго 12, а затем идёт четыре у 22, пять у 35, шесть у 51, и так далее. И вообще, сторона содержит столько единиц, сколько в пятиугольнике составлено вместе чисел, извлечённых из натурального числового ряда. Схожим и подобным образом, чтобы составить пятиугольник, числа берутся через два, начиная с единицы, то есть те, разность которых равна тройке.

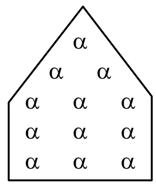
[3] Единица является первым в возможности и изображается так:



Второе число 5, составленное из 1 и 4, изображается так:



Третье число 12 составлено из двух первых с прибавлением 7, так что его сторона равна тройке, так как в нём сложены три числа; ведь так же 5 имело стороной двойку, будучи составлено из двух. А изображается оно так:



Следующие за ними будут получаться прибавлением чисел, идущих за семёркой с разностью в тройку, каковы 10, 13, 16, 19, 22, 25 и так до бесконечности; и это будут числа 22, 35, 51, 70, 92, 117 и так далее.

ГЛАВА XI

Шестиугольные, семиугольные и следующие за ними числа будут расставлены в своих рядах таким же образом, если из натурального ряда чисел извлекать ряды, идущие от единицы со своими разностями. Как треугольное число было получено последовательным сложением членов, которые разнились на единицу и нигде не пропускались; и четырёхугольное – с разностью в двойку, пропуская одно; и следующее пятиугольное – с разностью в тройку, пропуская два (и мы показали это на примере как самих чисел, так и составленных из них многоугольников); так и шестиугольники получаются, когда последовательно складываются их гномоны, идущие с разностью в четвёрку, пропуская три, то есть 1, 5, 9, 13, 17, 21 и так далее; так что шестиугольники будут равны 1, 6, 15, 28, 45, 66 и сколь угодно далее.

[2] Семиугольники получаются, когда последовательно складываются их гномоны, идущие с разностью в пятёрку, пропуская четыре, то есть 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36 и так далее; так что составляются 1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148 и так далее.

[3] Восьмиугольники получаются в таком же порядке, когда гномоны с разностью в семёрку складываются подобным образом.

[4] И все эти случаи согласованы между собой, так что гномоны любого многоугольника разнятся на число, на два меньшее, чем число углов в имени многоугольника, то есть на единицу у треугольника, на двойку у четырёхугольника, на тройку у пятиугольника, на четвёрку у шестиугольника, на пятёрку у семиугольника и так далее.

ГЛАВА XII

[1] О природе плоских многоугольников для первого *Введения* сказано достаточно. То, что учение о них согласовано графически и в нём нет разноголосицы, очевидно не только из чертежей, но также из следующего. Всякая четырёхугольная фигура разделяется по диагонали на две треугольных, и всякое четырёхугольное число разделяется на два последовательных треугольных числа и составляется из двух последовательных треугольных чисел. К примеру, треугольными числами будут 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, и так далее, а четырёхугольными – 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

[2] И если ты сложишь два последовательных треугольных числа, какие захочется, ты всегда получишь четырёхугольное число; и обратно, какое бы четырёхугольное число ты не раскладывал, ты всегда сможешь получить из него два треугольных числа.

И ещё, если ко всякой четырёхугольной фигуре пристроить треугольник, то получится пятиугольник; к примеру, если к четырёхугольнику 4 прибавить треугольник 1, то получится пятиугольник 5; и если к следующему 9 прибавить следующее 3, то получится пятиугольник 12; и следующее 16, сложенное со следующим 6, даёт следующее 22; а 25 и 10 дают 35, и так далее.

[3] И если в таком же порядке прибавлять к пятиугольникам треугольники, то будут получаться последовательные шестиугольники; и опять, если треугольники по порядку складывать с шестиугольниками, то получатся семиугольники, а если с этими – то восьмиугольники, и так до бесконечности.

[4] Чтобы запомнить это, мы выпишем параллельные ряды многоугольных чисел, первыми треугольные, под ними четырёхугольные, под ними обоими пятиугольные, затем шестиугольные, затем семиугольные, а если кто-то пожелает, то и следующие многоугольные. И каждый из параллельных рядов многоугольных чисел ты можешь продолжить далее.

Треугольные	1	3	6	10	21	28
Четырёхугольные	1	4	9	16	36	49
Пятиугольные	1	5	12	22	51	70
Шестиугольные	1	6	15	28	66	91
Семиугольные	1	7	18	34	81	112

[5] В общем же ты найдёшь, что четырёхугольники составлены из треугольников, стоящих в ряду над ними на том же месте и предшествующих им из того же рода. А именно: 4 = 3 + 1, 9 = 6 + 3, 16 = 10 + 6, 25 = 15 + 10, 36 = 21 + 15, и так далее.

А пятиугольники составлены из четырёхугольников, стоящих прямо над ними на том же месте, и треугольников из первого рода, номер которых на единицу меньше. А именно: 5 = 4 + 1, 12 = 9 + 3, 22 = 16 + 6, 35 = 25 + 10, и так далее.

[6] И ещё раз, шестиугольники состоят из стоящих прямо над ними пятиугольников и названных выше треугольников. А именно: 6 = 5 + 1, 15 = 12 + 3, 28 = 22 + 6, 45 = 35 + 10, и сколь угодно дальше.

[7] И семиугольники составляются таким же образом: ведь 7 = 6 + 1, 18 = 15 + 3, 34 = 38 + 6, и следующие так же. И так всякий многоугольник составляется из стоящего прямо над ним многоугольника, у которого число углов меньше на единицу, и самого верхнего треугольника, у которого номер в ряду меньше на единицу.

[8] И естественно, что треугольник является элементом многоугольника как в фигурах, так и в числах. Ведь в таблице и в глубину, и в ширину обнаруживается, что у последовательных чисел разность всегда является очередным треугольным числом.

ГЛАВА XIII

[1] Отсюда легко увидеть, что такое телесное число и как устроены последовательности равносторонних телесных чисел. Ведь если у числа к двум протяжениям, созерцаемым в плоском изображении, то есть к длине и ширине, добавляется трётье протяжение, которое одни называют глубиной, другие толщиной, иные же высотой, такое число называют телесным числом, имеющим три протяжения – длину, глубину, ширину.

[2] И это впервые проявляется в так называемых пирамидах. Они получаются сужением от широкого основания к острой вершине, и первыми из них будут треугольные пирамиды на треугольном основании, вторыми – четырёхугольные на четырёхугольном основании, за ними пятиугольные на пятиугольном основании, и по аналогии шестиугольные, семиугольные, восьмиугольные и так до бесконечности.

[3] Точно так же и в геометрических телесных фигурах: если представить, как от углов равностороннего треугольника проведены три прямые, равные по длине сторонам треугольника и сходящиеся по высоте в одну и ту же точку, то получится пирамида, ограниченная четырьмя равными равносторонними треугольниками, один из которых будет исходным, а три других будут ограничены упомянутыми выше тремя прямыми. [4] И опять, если представить четыре прямые, начинающиеся от плоскости квадрата, равные по длине сторонам квадрата, каждая каждой, и сходящиеся по высоте в одну и ту же точку, то получится пирамида на квадратном основании, имеющая четырёхугольную форму, ограниченная четырьмя равносторонними треугольниками и одним исходным квадратом. [5] И когда таким же образом прямые, по числу равные углам, выходят по одной из углов пятиугольника, шестиугольника, семиугольника и так далее, и сходятся в одну и ту же точку, получается пирамида, называемая по её основанию – пятиугольному, шестиугольному, семиугольному и далее по аналогии.

[6] Так же и среди чисел: всякое линейное число нарастает от единицы, как от точки, а именно 1, 2, 3, 4, 5 и далее до бесконечности; и из этих чисел, линейных и имеющих одно протяжение, не случайным образом составляются многоугольные и плоские числа: причём треугольные – из последовательных гномонов, четырёхугольные – когда гномоны берутся через один, пятиугольные – через два, и так далее.

[7] И точно так же, если плоские многоугольные числа складываются и надстраиваются одно поверх другого, то получаются одноимённые с ними пирамидальные числа: пирамида на треугольном основании из треугольников, на четырёхугольном основании из четырёхугольников, на пятиугольном из пятиугольников, на шестиугольном из шестиугольников, и так далее.

[8] Пирамиды на треугольном основании по порядку таковы: 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84 и так далее; и они получаются складыванием друг на друга треугольников, и первым будет 1, затем 1 + 3, затем 1 + 3 + 6, затем к ним добавится 10, следующим будет 15, затем 21, затем 28, и так до бесконечности.

[9] И ясно, что наибольшее число будет мыслиться нижним в качестве основания, следующее по порядку будет лежать поверх него, а следующее – поверх этого, и так до единицы, которая будет находиться на вершине, словно завершая пирамиду в точке.

ГЛАВА XIV

[1] Следующие по порядку пирамиды суть те, которые имеют четырёхугольное основание и по этой фигуре сходятся к одной и той же точке. Они получаются таким же образом, как и рассмотренные выше треугольные пирамиды. Ведь идущие по порядку от единицы четырёхугольные числа суть 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100; и я опять буду складывать последовательные числа одно на другое по глубине, и, положив 1 сверху на 4, я получу первую настоящую пирамиду с четырёхугольным основанием (а первой в возможности была единица). [2] И вновь, я положу эту пирамиду, составленную из пяти единиц, на четырёхугольник 9, и получится пирамида 14 на четырёхугольном основании, у которой все рёбра равны 3; а у предыдущей пирамиды 5 они были равны двойке, а у первой в возможности – единице. Ведь каждое ребро любой пирамиды содержит столько единиц, сколько было составлено последовательных многоугольных чисел, чтобы получить эту пирамиду. [3] И опять, положив эту пирамиду 14 с четырёхугольным основанием 9 на четырёхугольник 16, я получу 30, третью настоящую пирамиду на четырёхугольном основании.

И таким же образом мы получим соответствующие пирамиды на основаниях пятиугольном, шестиугольном, семиугольном и так далее, складывая один на другой соответственные многоугольники, начиная с единицы как с наименьшего и продолжая до бесконечности.

[4] Отсюда очевидно, что треугольники являются элементарными по виду: ведь все указанные и предъявленные пирамиды на различных многоугольных основаниях ограничены треугольниками, сходящимися к вершине.

[5] Чтобы мы не пренебрегли усечёнными, дважды усечёнными и трижды усечёнными пирамидами, а под этими наименованиями они рассматриваются в теоретических работах, тебе следует знать, что если пирамида с любым основанием, будь оно треугольное, четырёхугольное, пятиугольное и так далее, при надстраивании не дошла до единицы, она называется усечённой, потому что она оставлена без естественной вершины; ведь она завершается не в единице, первом в возможности многоугольнике, как в одной точке, но в другом, настоящем [многоугольнике], и имеет вершиной не единицу, но плоскую грань, у которой столько же углов, сколько и у основания. И если, в дополнение к тому, что она не завершается в единице, она не завершается также и в первом вслед за единицей настоящем многоугольнике, она называется дважды усечённой. И далее, если в качестве верхней грани она не имеет даже второго настоящего многоугольника, но лишь следующий за ним, она называется трижды усечённой; и даже четырежды усечённой, если не имеет следующего, и пять раз усечённой на следующем шаге, и эти наименования можно продолжать сколь угодно далее.

ГЛАВА XV

[1] Таким образом, рассмотрены зарождение, продвижение, увеличение и природа телесных пирамидообразных чисел, семя и корень которых содержатся в многоугольных числах и в их последовательном складывании друг на друга. Имеются также телесные числа других упорядоченных родов, так называемые кубические, «балки», «плитки», «клинья», сферические, параллелепипедные, которые разворачиваются в своём порядке.

[2] Вышеупомянутым четырёхугольным числам 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, и так далее, являющимся дважды протяжёнными и имеющим в плоском изображении только длину и ширину, может быть придано третье протяжение, и они станут телесными и трижды протяжёнными, если каждое из них умножить на его сторону; $4 = 2 \times 2$, будучи снова взято дважды, становится восьмью; и $9 = 3 \times 3$, будучи снова взято трижды, восстанавливается в ещё одном протяжении и порождает 27; и $16 = 4 \times 4$, умноженное на четвёрку, собственную сторону, порождает в увеличении 64; и так все следующие.

[3] И их стороны будут содержать столько же единиц, сколько их было в сторонах квадратов, от которых они в каждом случае произошли: сторона 8 будет равна двойке, как и у 4; сторона 27 – тройке, как и у 9; сторона 64 – четвёрке, как и у 16; и так далее; а сторона единицы, куба в возможности, будет равна единице, так же как и у единицы как квадрата в возможности.

[4] В общем, как всякий квадрат является плоской [фигурой], имеющей четыре стороны и четыре угла, так и всякий куб, образованный из соответственного квадрата умножением на его сторону, имеет шесть плоскостей, которые все равны исходному квадрату, двенадцать сторон, каждая из которых по числу единиц равна стороне исходного квадрата, и восемь телесных углов, каждый из которых ограничен тремя сторонами, что также идёт от исходного квадрата.

ГЛАВА XVI

[1] Из телесных фигур один только куб имеет равные стороны по длине, глубине и ширине, и одинаковую протяжённость по шести так называемым направлениям,[55] и ему противоположны такие [телесные фигуры], протяжённости которых не равны между собой, так что глубина не равна ширине и обе они не равны длине, к примеру, $2 \times 3 \times 4$ или $2 \times 4 \times 8$, или $3 \times 5 \times 12$, или какая-нибудь иная [телесная фигура] с таким же неравенством.

[2] Такие телесные фигуры называются просто разносторонними, если у них не равны все три протяжения. Впрочем, они имеют различные наименования, причём некоторые называют их «клиньями» (σφηνίσκοι),[56] по тем разносторонним клиньям, которые используют в своей работе плотники, строители и кузнецы и другие ремесленники, и которые изготовляются заострёнными с

[55] См. II 6, 4.

[56] Ср. Герон, *Определения* 114.

одного конца и постепенно неодинаково расширяющимися по всем протяжениям. Другие же называют их «осами» (σφηκίσκοι), потому что они похожи на тела ос, перетянутые посредине и показывающие упомянутое подобие. Отсюда получила своё имя и верхушка шлема (σφήκωμα), ведь в месте перетяжки она напоминает талию осы. Иные называют эти числа «алтарями», потому что они подобны древним алтарям, особенно ионийским, у которых ширина не равна глубине, и обе они не равны длине, и основание не равно вершине, но все их размеры различны.

[3] И в то время как эти два вида чисел, кубические и разносторонние, являются противоположными, поскольку все протяжения первого равны между собой, а все протяжения второго неравны, средними между ними являются так называемые параллелепипедные телесные числа. Их грани являются гетеромекными числами, так же как у кубов все грани являются квадратными числами, как это было показано.

ГЛАВА XVII

[1] Начиная заново, скажем, что число называется гетеромекным, если на плоскости оно схематически изображается четырёхсторонником и производится и вычерчивается подобно квадрату, но его стороны не равны одна другой, так что длина не равна ширине, но они разнятся на единицу. К примеру, таковы 2, 6, 12, 20, 30, 42 и так далее; ведь если кто-либо представит их графически, он всегда будет получать их так: $1 \times 2 = 2$, $2 \times 3 = 6$, $3 \times 4 = 12$, и далее аналогично: 4×5, 5×6, 6×7, 7×8, и так до бесконечности. И во всяком из них одна сторона больше другой на единицу, и ни на какое другое число.

Если же разные стороны различаются не на единицу, а на другое число, например на двойку, тройку, четвёрку и так далее, например 2×4, или 3×6, или 4×8, или как-либо иначе, такое число называется уже не гетеромекным, но продолговатым (προμήκης). Ведь древние из школы Пифагора и его последователи говорили об ином (ἕτερον) и инаковости как о двойке, и о таком же и тождестве как о единице, как о двух началах всего сущего, и разность этих двух [начал] отыскивалась в единице. Поэтому «иной» в семенном смысле – это отличающийся на единицу, а не на другое число; и те, кто следит за правильностью речи, называют «иными» две, а не много вещей.

[2] Кроме того, как было сказано ранее, все нечётные числа обретают свой вид в единице, а чётные – в двойке. Поэтому мы можем сказать, что нечётные числа участвуют в природе тождественного, а чётные – в природе иного; ведь когда они складываются последовательно – по природе, а не по нашему произволу, – то нечётные, бесконечно прибавляемые к единице, производят квадратные числа, а чётные, бесконечно прибавляемые к двойке, производят гетеромекные числа.

[3] Поэтому нужно ещё раз продумать, что квадрат участвует в природе тождественного, ведь его стороны демонстрируют одно и то же отношение, подобие и неизменность, и лежат в равенстве; а гетеромекное число участвует в

природе иного, ведь как единица разнится от двойки на одну лишь единицу, так и стороны всех других гетеромекных чисел различаются между собой на одну лишь единицу.

К примеру, если я выставлю перед собой последовательные числа, начиная с единицы, и соберу вид нечётных чисел в один ряд, а вид чётных чисел в другой, я получу два таких ряда:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26

[4] Здесь ряд нечётных начинается с единицы, относящейся к тому же роду и обладающей природой тождественного; и когда [число] этого рода умножается на себя и получается плоское или телесное, результат, по сути, не отличается от исходного, но сохраняет эту суть; ведь среди других чисел его обнаружить невозможно. [5] Другой ряд начинается с двойки, однородной с ним по сути и подчинённой инаковости; ведь, умножаясь на инородное, она производит перемену, к примеру, 2×2, 2×3.

[6] В случае, когда 8×8 берётся дважды или трижды, и вообще, когда равно-равное берётся меньшее число раз, получившаяся телесная фигура называется «плиткой».[57] Если же к квадрату присоединяется большая высота, то такое число называется «балкой»,[58] к примеру, когда 3×3 умножается на семь, восемь или девять, или на другое превосходящее число; ведь «балка» – это число, которое получается, когда равно-равное умножается на большее число. И «клин» – это неравно-неравно-неравное, а куб – это равно-равно-равное.

[7] Некоторым из кубов, кроме того что они являются равно-равно-равными, присуще при умножении всегда заканчиваться на ту же [цифру], и тогда они называются сферическими или возвратными. Это происходит, когда сторона равна 5 или 6; ведь в какую бы степень я не возводил одно из этих чисел, результат всегда будет иметь то же окончание; и если число заканчивалось на 6, то и результат будет заканчиваться на 6, а если на 5, то на 5. К примеру, 5×5 заканчивается на 5, и если это умножить на пять, и ещё раз на пять, и так до бесконечности, то в конце не обнаружится ничего, кроме 5. И таким же образом для 6 не будет ничего, кроме 6. Единица также является сферической и возвратной в возможности, ведь она претерпевает то же, что сферы и круги. А они где начинаются, там и заканчиваются, совершив оборот и вернувшись назад. Так и названные числа: они одни заканчиваются тем же, что и в начале, будучи взяты равно-равными и при любом возведении в степень (αὐξήσις). Приобретая два плоских протяжения, они называются круговыми: 1, 25, 36 суть 1×1, 5×5 и 6×6. Но если они приобретают три протяжения или умножаются большее число раз, тогда их называют сферическими телесными числами, каковы 1, 125, 216, или 1, 625, 1296.

[57] Ср. Герон, *Определения* 113.

[58] Ср. Герон, *Определения* 112.

ГЛАВА XVIII

[1] О телесных числах тем самым сказано достаточно. Физики и те, кто начинает с математики, говорят о тождественном и ином как о началах Вселенной. И показано, что тождественное главенствует над единицей и произведённым от неё видом нечётных, а ещё сильнее – над квадратами, которые получаются путём последовательного сложения нечётных, потому что оно принимает участие в равенстве их сторон; а иное – над двойкой и произведённым от неё видом чётных, а ещё сильнее – над гетеромекными числами, которые получаются путём последовательного сложения чётных, по причине исходного неравенства и инаковости, которые проявляются в различии их сторон. И потому нужно показать, как в них обоих, словно в началах и семенах, в возможности присутствуют свойства всех чисел, их видов и подразделений, будь то многоугольные числа или какие-либо ещё.

[2] Первым делом нам необходимо различить, чем продолговатое число отличается от гетеромекного. Ведь гетеромекное, как было сказано выше,[59] получается перемножением двух чисел, разнящихся на единицу, к примеру, $6 = 2 \times 3$, и $12 = 3 \times 4$; а продолговатое тоже получается из двух различных чисел, но они разнятся не на единицу, а на большее число, к примеру, 2×4, 3×6, 4×8, и прочие, которые различаются по длине более чем на единицу.

[3] И поскольку квадраты получаются умножением чисел на их собственную длину, они имеют одинаковую длину и ширину, и в собственном смысле называются своесторонними (ἰδιομήκης) или тождественносторонними (ταυτομήκης), к примеру, 2×2, 3×3, 4×4, и так далее. И поэтому все они показывают тождество и равенство, будучи ограниченными и конечными,[60] ведь «равное» и «тождественное» определены одинаково. А что касается гетеромекных чисел, то они получаются умножением не на свою, но на иную длину, потому они и являются гетеромекными, ведь инаковость показывает беспредельность и неограниченность.

[4] Так противопоставляются, разделяются и проявляются в своей инаковости все числа и всё, что по ним совершается в космосе; и хорошо сделали древние, приступившие к изучению природы, когда в своих космогониях они произвели это первое разделение. Платон также упоминает это различие между природой тождественного и иного, а также между неделимой и всегда самостоятельной сущностью и тем, что допускает разделение.[61] Филолай говорит, что всё сущее по необходимости должно быть либо безгранично, либо ограничено, либо одновременно безгранично и ограничено, что вполне согласуется с тем, что космос одновременно состоит из безграничного и ограниченного, а это становится ясным в числе: ведь все числа состоят из единицы и двойки, из чётного и нечёт-

[59] См. II 17, 1.

[60] В том смысле, что все квадратные числа имеют одну форму.

[61] Платон, *Тимей* 35.

ного, и являют равенство и неравенство, тождество и инаковость, ограниченность и безграничность, определённость и неопределённость.

ГЛАВА XIX

[1] Чтобы яснее убедиться в сказанном, а именно в том, что вещи составляются из враждебных и инаковых и справедливо подчиняются гармонии (ведь гармония всегда возникает из противоположного, ибо гармония есть единение многих и единомыслие разномыслящих), мы расположим в два параллельных ряда уже не сами чётные числа, начиная с двойки, и нечётные числа, начиная с единицы, как это было раньше, но те числа, которые получаются из них последовательным суммированием: квадратные из нечётных и гетеромекные из чётных. Обратив внимание на их взаимное расположение, мы восхитимся их содружеством и взаимопомощью в производстве и совершенствовании прочих, так что правдоподобно думать, что отсюда и в природе Вселенной составляется космический промысел.

[2] И эти два ряда будут такими: квадраты, идущие от единицы – 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, и гетеромекные числа, начинающиеся от двойки – 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156, 182, 210, 240.

[3] И, начиная с первого места, первые члены дают корневое многократное отношение,[62] второй ко второму – полуторное, третий к третьему – сверхтретье, четвёртый к четвёртому – сверхчетвертное, а затем сверхпятерное, сверхшестерное, и по аналогии до бесконечности. А их разности будут возрастать как последовательные числа от единицы, и первая разность будет единицей, вторая – двойкой, третья – тройкой и так далее. И если вначале второй квадрат соотнести с первым гетеромекным числом, а потом соотнести третий со вторым, четвёртый с третьим и таким же образом остальные, то получатся неизменные отношения, но разности будут нарастать теперь не от единицы, а от двойки, оставаясь такими же, и в согласии с предыдущим соотнесением первые члены имеют первое корневое многократное отношение, второй ко второму – второе от корня и полуторное, третий к третьему – третье от корня и сверхтретье, и так далее.

[4] И ещё, квадраты будут иметь между собой только нечётные разности, а гетеромекные числа – только чётные. И если мы поместим первое гетеромекное число между двумя первыми квадратами как средний член, а второе между следующими, а третье между идущими за ними, и четвёртое между следующими, то будут заметны упорядоченные сопряжения из трёх членов: ведь как 4 к 2, так и 2 к единице; и как 9 к 6 даёт полуторное отношение, так и 6 к 4; и как 16 к 12 даёт сверхтретье отношение, так и 12 к 9; и так далее, где числа и отношения выстроены по порядку. Как большее относится к среднему, так и среднее к меньшему, и каждый раз не в одном и том же отношении, но в следующем по порядку. И во всех соединениях произведение крайних членов равно квадрату

[62] А именно 2 : 1 – двукратное.

среднего; и далее, крайние члены с добавлением удвоенного среднего поочерёдно всегда производят квадрат. И что замечательнее всего, сложением двух соседних членов всегда производятся упорядоченные треугольные числа, так что их природа является самой первоначальной: 1 + 2, 2 + 4, 4 + 6, 6 + 9, 9 + 12, 12 + 16, 16 + 20, и далее тоже возникают треугольные числа, которые в свою очередь порождают многоугольные.

ГЛАВА XX

[1] А ещё гетеромекное число получается из квадратного прибавлением его стороны, но также – клянусь Зевсом! – и вычитанием его стороны. Так, инаковость мыслится и большей, и меньшей тождества, поскольку она получается из него и прибавлением, и вычитанием, – так же как и два вида неравенства, большее и меньшее, получаются из равенства прибавлением и вычитанием. [2] Важно и то, что оба вида участвуют в тождестве и в инаковости, причём в инаковости безгранично, а в тождестве ограниченно, зарождаясь в единице и двойке: нечётное участвует в тождестве через родство с единицей, а чётное – в инаковости через родство с двойкой.

[3] Имеется ещё один ясный довод, почему квадрат, поскольку он складывается из нечётных чисел, сродни тождеству, а гетеромекное число, составленное из чётных, сродни инаковости. Содружество этих двух рядов удивляет и тем, что если их члены имеют одинаковую разность, то их отношения не будут одинаковыми, а если они имеют одинаковые отношения, то одинаковыми не будут их разности. Ведь разность между 4 и 2 в двойном отношении равна разности 6 и 4 в сверхчастном [63] отношении; и разность 9 и 6 в полуторном отношении равна разности 12 и 9 в сверхтретьем, и так далее. Одинаковое по качеству различно по количеству; и обратно, одинаковое по количеству различно по качеству. [4] И ясно, что одинаковой разности между двумя членами в соседних сопряжениях обязательно будут соответствовать доли, наименования которых отличаются на единицу: здесь половина, а там треть; здесь треть, а там четверть; здесь четверть, а там пятая доля, и так далее.

[5] Но то, что причиной тождества является нечётное, а не чётное, сильнее всего подтверждается всякой прогрессией, идущей от единицы в одном и том же отношении, к примеру, в двойном: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, или в тройном: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, и сколь угодно далее. Ты найдёшь, что по необходимости на нечётных местах стоят квадраты, и никакая хитрость не поставит сюда ничего иного, а на чётных местах квадратов нет. Но всегда, когда берётся равно-равно-равное, то есть куб, имеющий три протяжения, нечётные, а не чётные кажутся причастными тождеству ещё в большей степени. Таковы 1, 8, 27, 64, 125, 216 и далее по аналогии в простой и неизменной последовательности. Ведь когда последовательные нечётные числа расположены вслед за единицей, первое является кубом в возможности; следующие два,

[63] А именно, в полуторном отношении.

сложенные вместе – вторым; следующие три – третьим; сумма следующих четырёх – четвёртым, и идущих за ними пяти – пятым, и следующих шести – шестым, и так далее.[64]

ГЛАВА XXI

[1] Теперь нам следует перейти к пропорции, которая наиболее важна для теоретического учения о природе, музыки, сферики и науки о линиях, и она играет не последнюю роль в трудах древних, и служит завершением этого *Введения в арифметику*, придавая ему гармоничность и соразмерность.

[2] Пропорция в собственном смысле представляет собой связывание двух или более отношений, а в общем смысле – двух или более сопряжений, даже если они подчинены не одному и тому же отношению, но разности или чему-нибудь другому.

[3] Отношение есть сопряжение двух членов между собой,[65] а пропорция есть соединение отношений,[66] так что наименьшее количество членов, из которых она составляется, равно трём, хотя она может быть и более длинной, подчинённой одному отношению или одной разности. К примеру, 1 к 2 есть отношение двух членов, а именно двукратное, и 2 к 4 есть другое подобное отношение; а пропорция есть 1, 2, 4, соединение отношений из трёх членов, между которыми наблюдается одно и то же отношение друг к другу. [4] То же самое можно наблюдать и для больших [чисел], и для большего числа членов: добавим четвёртый член 8 вслед за 4 опять с таким же двукратным сопряжением, а затем 16 вслед за 8, и так далее.

[5] И если один и тот же неизменный член сравнивается с каждым из соседних, будь то с большим и последующим или с меньшим и предыдущим, такая пропорция называется непрерывной; к примеру, такова пропорция 1, 2, 4 по качеству: ведь как 4 к 2, так и 2 к 1; и обратно, как 1 к 2, так и 2 к 4. А пример по количеству будет 1, 2, 3: ведь насколько 3 превышает 2, настолько 2 превышает 1; и наоборот, насколько 1 уступает 2, настолько 2 уступает 3.

[6] Если же один член соответствует меньшему члену и становится его большим и последующим, а другой, но не тот же самый член, соответствует большему члену и становится его меньшим и предыдущим, то пропорция с такими средними членами называется не непрерывной, но раздельной. Пример по качеству будет 1, 2, 4, 8: здесь 2 к 1 как 8 к 4, и обратно 1 к 2 как 4 к 8, и перестановкой 1 к 4 как 2 к 8, а также 4 к 1 как 8 к 2. А пример по количеству будет 1, 2, 3, 4: здесь 1 уступает 2 как 3 уступает 4; и 4 превышает 3 как 2 превышает 1; и перестановкой, 3 превышает 1 как 4 превышает 2; и 1 уступает 3 как 2 уступает 4.

---

[64] $1 = 1^3$, $3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$, … . Сложив вместе несколько таких соотношений, начиная с первого, мы выразим сумму последовательных кубов через сумму последовательных нечётных чисел, и тем самым представим её в виде квадратного числа.

[65] Ср. Евклид, *Начала* V, опр. 3.

[66] Ср. Евклид, *Начала* V, опр. 6.

ГЛАВА XXII

[1] Первые три пропорции, упоминаемые всеми древними, Пифагором, Платоном и Аристотелем, суть арифметическая, геометрическая и гармоническая; а за ними следуют ещё три, не имеющие собственных названий и обычно называемые четвёртой, пятой и шестой средними; а нынешние учёные нашли ещё четыре, так что их всего стало десять, а это число, по мнению Пифагора, является самым совершенным. Это согласуется с тем, что мы совсем недавно наблюдали десять сопряжений,[67] и с так называемыми десятью категориями,[68] и с числом конечных разделений в сложении наших рук и ног, и с тысячей других вещей, о чём мы скажем в соответствующем месте.[69]

[2] А теперь мы должны разобраться с устройством пропорций. И первой будет та пропорция, в которой сравнение, сближение и связывание членов между собой происходит по количеству, то есть та, в которой разности между членами равны по количеству. Это арифметическая пропорция, и, как уже было сказано, собственно с ней и связано количество.

[3] Но по какой причине речь сначала пойдёт об этой пропорции, а не о какой-либо другой? Очевидно, что природа выставляет её на обозрение прежде остальных. Ведь обычные натуральные числа, идущие по порядку за единицей, без пропусков и без исключений, сохраняют одно только это отношение. И в наших предыдущих рассуждениях мы показали, что это *Введение в арифметику* предшествует прочим, потому что с его устранением устраняются и другие, но оно не устраняется вместе с ними, и оно не привносит с собой других, но привносится вместе с ними.[70] И потому «среднее» (μεσότης),[71] одноимённое с арифметикой, небезосновательно идёт впереди «средних», одноимённых с геометрией и гармонией; а все прочие «средние» тем более будут идти вслед за этими тремя. [4] Так что арифметическое «среднее» по справедливости следует рассмотреть прежде всех остальных, как первичное и начальное по своей природной сути.

ГЛАВА XXIII

[1] Арифметическое «среднее» получается, когда взяты или выдуманы три или более последовательных члена, и между любыми соседними членами обнаруживается одна и та же разность, но не одно и то же отношение. К примеру, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. В этом натуральном числовом ряду, рассматриваемом последовательно и без пропусков, обнаруживается, что любой член, стоящий между двумя другими, является средним арифметическим

---

[67] См. I 17–23.

[68] Имеются в виду десять категорий Аристотеля.

[69] То есть в *Теологуменах арифметики*.

[70] См. I 4, 2.

[71] Следует различать среднее (μεσόν) как средний член, и среднее (μεσότης) как «заполненность» между краями. Это последнее «среднее» оказывается синонимом пропорции; мы будем отличать его от первого, употребляя кавычки.

между ними. Ведь разности между ним и соседями равны; однако их отношение не сохраняется.

[2] И ясно, что в таком ряду возникают и непрерывные, и раздельные «средние»; ведь если один средний член соответствует своим соседям, предыдущему и последующему, это будет непрерывное «среднее», а если ещё и другой, то получится раздельное «среднее».

[3] Если мы теперь выделим из этого ряда три произвольных последовательных члена в непрерывной форме, либо четыре и более члена в раздельной форме, везде разностью будет единица, а отношение всюду будет различным. И пусть члены будут не последовательными, но разделёнными, причём с равными промежутками, и их будет три или больше. Если члены берутся через один, то разность всюду будет равна двум; и если их три, то оно будет непрерывным, а если больше, то раздельным. А если они берутся через два, то разность будет всюду равна трём, – и в разрывном, и в непрерывном. А для трёх – четырём, и для четырёх – пяти, и так далее.

[4] И в разностях здесь участвует равное количество, но не равное качество, вот это «среднее» и называется арифметическим. А если бы, напротив, здесь участвовало равное качество, а не количество, оно было бы не арифметическим, а геометрическим.

[5] Для этого «среднего» характерно то, чего нет у других, а именно, что полусумма крайних членов равна среднему члену, рассматривается ли непрерывное «среднее» или раздельное, или когда его члены берутся перестановкой. Ведь средний член, сложенный с самим собой, либо средние члены, сложенные друг с другом, равны сумме крайних.

[6] Вот ещё одна особенность: какое отношение каждый член имеет к себе самому, такое же и разности к разностям; ведь они находятся в равенстве.

Ещё один замечательный факт, который от многих ускользает, состоит в том, что произведение крайних членов в сравнении с квадратом среднего члена оказывается меньшим на произведение разностей, будь они равны единице, двойке, тройке, четвёрке или какому-либо иному числу.[72]

Четвёртый факт, на который указывали все предыдущие авторы, состоит в том, что отношение между меньшими членами оказывается большим, нежели отношение между большими членами. Ниже мы увидим, что в гармоническом «среднем», напротив, отношение между большими членами оказывается большим, а между меньшими – меньшим. Поэтому гармоническое «среднее» противоположно арифметическому, а посередине между ними как крайними находится геометрическое, имеющее одинаковое отношение как между меньшими членами, так и между большими; а мы видели, что равенство находится посередине между большим и меньшим.[73] Вот и всё, что мы скажем об арифметическом «среднем».

---

[72] Пусть $c - b = b - a = \Delta$; тогда $ac = (b - \Delta)(b + \Delta) = b^2 - \Delta^2$.

[73] Этот факт играет важную роль в античной теории музыки.

ГЛАВА XXIV

[1] После него мы рассмотрим геометрическое «среднее», единственное, которое можно назвать пропорцией (ἀναλογία) в собственном смысле, поскольку в нём наблюдается одно и то же отношение (τὸ ἀνα τὸν αὐτὸν λόγον) между всеми членами.[74] Оно таково, что когда имеются три члена или более, то больший из них относится к следующему за ним, как этот к своему следующему, и если имеются ещё члены, то каждый из них относится к следующему так, что одной и той же разности по количеству между ними не получается, но их отношение по качеству одно и то же, в отличие от арифметического «среднего».

[2] К примеру, выставим от единицы числа в двукратном отношении: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, и так до бесконечности; или в трёхкратном: 1, 3, 9, 27, 81, 243 и так далее; или в четырёхкратном, или в каком-нибудь ещё. В каждом из этих рядов три последовательных члена, или четыре, или сколько-нибудь ещё, будут образовывать друг с другом геометрическую пропорцию. И как первый относится к следующему за ним, так и этот к следующему за ним, и снова этот к следующему за ним, и сколь угодно далее; и то же самое получается перестановкой. К примеру: 2, 4, 8. Ведь 8 имеет к 4 такое же отношение, как и 4 к 2; и обратно; но количественная разность между ними не одинакова. И ещё раз: 2, 4, 8, 16. Ведь 16 к 8 снова имеет то же самое отношение, но не разность. И перестановкой получается подобное сопряжение: как 16 к 4, так и 8 к 2; и обратно, как 2 к 8, так и 4 к 16. И в раздельной форме, как 2 к 4, так и 8 к 16; и обращением раздельной формы, как 16 к 8, так и 4 к 2; ведь все они имеют двойное отношение.

[3] Геометрическое «среднее» также имеет особенность, которой нет у других «средних»: разности членов имеют друг к другу такое же отношение, как и сами члены к следующим за ним, большие к меньшим, и обратно.

Ещё одна его особенность состоит в том, что если члены имеют двойное отношение, то соседние члены разнятся на меньший из них, и соседние разности – на меньшую их них; а если тройное, то члены и разности будут иметь в качестве разности дважды взятые меньшие; а если четырёхкратное, то трижды; а если пятикратные, то четырежды, и так будет всегда.

[4] Геометрическая пропорция возникает не только между многократными, но также и между сверхчастными, сверхмногочастными и смешанными. И у всех этих «средних» сохраняется та особенность, что в непрерывном произведение крайних равно квадрату среднего члена, а в раздельном с большим числом членов, даже если оно и не является непрерывным, но содержит чётное число членов, произведение крайних равно произведению средних.

[5] И в качестве образца того, что во всяких сопряжениях – во всех многократных, во всех сверхчастных, во всех сверхмногочастных, во всех смешанных – сохраняется особенность этой пропорции, будет вполне достаточно, если мы, начиная с равенства, представим с помощью трёх правил[75] все виды неравенства,

---

[74] Ср. Евклид, *Начала* VII, опр. 21.

[75] См. I 23, 7 и сл.

в прямом и в обратном порядке. Ведь в каждом образовании и полагании имеется геометрическая пропорция со всеми названными особенностями, к примеру, с чётвёртой, так что они сохраняют одно отношение как в больших, так и в меньших членах. Более того, если мы объединим в один ряд гетеромекные и квадратные числа, взяв их поочерёдно из обоих рядов, и затем рассмотрим группы по три члена, начиная с единицы, чтобы всегда последний член предыдущей группы был первым членом следующей, мы обнаружим, что из многократного сопряжения – а именно из двукратного – возникают один за другим все виды сверхчастного: полуторное, потом сверхтретье, потом сверхчетвертное и так далее.

[6] Здесь будет уместно упомянуть одно следствие, которое будет полезно для нас, когда мы будем иметь дело с такой платоновской теоремой: «Плоские числа всегда связываются через одно среднее, а телесные через два, образуя пропорцию».[76] Ведь для двух последовательных квадратов[77] отыскивается только один средний член, сохраняющий геометрическую пропорцию, так что меньший из них становится первым членом пропорции, а больший последним, – и ни одного больше. И наблюдаются два интервала между крайними членами и средним, в сопряжённых подобных отношениях. [7] И снова, для двух последовательных кубов[78] отыскиваются только два пропорциональных средних члена в геометрической пропорции, и ни одного более. Здесь имеются три интервала, один между средними членами и два между крайними и средними с каждой стороны. [8] Поэтому телесные фигуры называются трижды протяжёнными, а плоские – дважды. К примеру, пусть 1 и 4 – плоские, и среднее пропорциональное между ними 2; или пусть это 4 и 9, два квадрата, а среднее пропорциональное между ними 6; одно и то же отношение образует большее и образуется для меньшего, и так же разность к разности. [9] Причина заключается в том, что стороны двух квадратов дают в произведении это самое число 6. А для кубов, к примеру для 8 и 27, отыскивается уже не один средний член, но два, 12 и 18, имеющие одно и то же отношение между собой и с [крайними] членами, и это же отношение имеется между разностями. А причина этого в том, что стороны кубов в разных наборах производят два средних: $2 \times 2 \times 3$ и $3 \times 3 \times 2$.

[10] И в общем, если квадрат умножается на квадрат, то получается квадрат; а если квадрат на гетеромекное число (или гетеромекное на квадратное), квадрата никогда не получается; и если куб умножается на куб, всегда получается куб; а если куб на гетеромекное число (или гетеромекное на куб), куба не получается. Также если чётное умножается на чётное, всегда получается чётное; а если нечётное на нечётное, всегда получается нечётное; а если нечётное на чётное или чётное на нечётное, то всегда получается чётное и никогда – нечётное. [11] Эти вопросы будут прояснены в комментарии к Платону, касающемуся так называемого «брачно-

[76] Платон, *Тимей* 32.

[77] Ср. Евклид, *Начала* VIII, 11.

[78] Ср. Евклид, *Начала* VIII, 12.

го места» в *Государстве*, посвящённого Музам.[79] Мы же перейдём здесь к третьей пропорции, называемой гармонической, и рассмотрим её.

ГЛАВА XXV

[1] Третье по порядку «среднее», называемое гармоническим, таково, что средний из трёх членов не состоит в одном и том же отношении к крайним, предыдущему и последующему, как в геометрическом «среднем»; и он не образует равных интервалов и неравных отношений, как в арифметическом «среднем»; но какое отношение имеет наибольший член к наименьшему, такое же отношение имеет и разность между наибольшим членом и средним к разности между средним и наименьшим членом. К примеру, 3, 4, 6; или 2, 3, 6. Ведь 6 превосходит 4 на свою треть, поскольку 2 есть треть от 6; и 2 уступает 3 на его треть, поскольку треть от 3 есть единица. А в первом примере крайние члены находятся в двойном отношении, и разности, которые они образуют со средним членом, также находятся в двойном отношении; а во втором примере – в тройном.

[2] Его особенность, как мы уже сказали,[80] противоположна арифметическому «среднему». Ведь тогда отношение меньших членов было большим, а отношение больших членов – меньшим. Теперь же, напротив, отношение больших будет большим, а меньших – меньшим. А в геометрической пропорции, как в средней между этими двумя, отношения больших и меньших членов оказываются равными, что находится посреди между большим и меньшим.

[3] И в арифметической пропорции видно, что средний член больше и меньше своих соседей на одну и ту же свою долю, но на разные доли большего и меньшего членов. А гармоническая противоположна ей, поскольку в ней средний член больше и меньше своих соседей на разные доли себя самого, но при этом всегда на одну и ту же долю крайних членов, например на половину или на треть. А геометрическая находится посередине между ними обеими, проявляя это свойство не только либо в среднем члене, либо в крайних, но повсюду, и в среднем и в крайнем.

[4] Гармоническому «среднему» присуща ещё одна особенность: сумма его крайних членов, умноженная на средний член, вдвое больше произведения крайних членов.[81] [5] Гармоническое «среднее» называется так, потому что арифметическое выделяется по количеству, показывая равенство в интервалах между членами; а геометрическое – по качеству, давая подобные сопряжения между членами; а это «среднее» по виду таково, что в нём не видно ни одного, ни другого: ни в одних лишь членах, ни в одних лишь разностях, но частично в членах и частично в разностях. Ведь как больший член относится к меньшему, так и разность между большим и последующим средним относится к разности между меньшим и средним; и обратно.

---

[79] Платон, *Государство* 546. Соответствующее сочинение Никомаха до нас не дошло.

[80] См. II 23, 6.

[81] Это даёт простое правило для вычисления среднего члена по двум крайним.

ГЛАВА XXVI

[1] Выше мы выяснили, что соотнесённое сущее служит предметом гармонической теории; и особенно потому, что в этом «среднем» обнаруживаются музыкальные отношения в гармонических созвучиях. Простейшее из них – это кварта, подчинённая сверхтретьему отношению 4 к 3, и она представляет собой отношение члена к члену в рассмотренном выше примере двукратного отношения,[82] или отношение разности к разности в примере трёхкратного отношения, ведь это разности между 6 и 2 и между 6 и 3. Вслед за ним идёт квинта, подчинённая полуторному отношению, 3 к 2 или вновь 6 к 4, член к члену. Система из обоих, полуторного и сверхтретьего, даёт октаву,[83] следующий [интервал], подчинённый двукратному отношению, каковое есть 6 к 3, член к члену в каждом из примеров. Если составить вместе октаву и квинту, они сохранят трёхкратное отношение, которое представляет собой систему из двукратного и полуторного, 6 к 2, член к члену в примере трёхкратного отношения и разность к разности там же; а в примере двукратного отношения это отношение большего члена к разности межу ним и средним, или отношение разности крайних членов к меньшей разности. Завершающее и наибольшее созвучие, так называемая двойная октава, поскольку она является дважды двукратной, подчинена четырёхкратному отношению, а таковы в примере двукратного отношения отношение среднего члена к меньшей разности, а в примере трёхкратного отношения отношение разности крайних членов к меньшей разности.

[2] Некоторые же в согласии с Филолаем считают, что оно называется гармоническим, поскольку сопутствует геометрической гармонии, и они говорят, что геометрическая гармония – это куб, в котором гармонизованы три протяжённости, соединённые в равно-равно-равном. Ведь это «среднее» проявляется во всяком кубе, поскольку во всяком кубе имеется 12 сторон, 8 углов и 6 плоскостей; и 8 является средним гармоническим между 6 и 12. Ведь как крайние члены относятся между собой, так и разность между большим и средним к разности между средним и меньшим; и ещё средний превышает меньший на одну свою долю, а превышается большим на другую, но зато он разнится с крайними на одну и ту же долю этих крайних. И ещё, сумма крайних членов, умноженная на средний, вдвое больше того, что дают крайние при умножении друг на друга. Здесь кварта есть 8 к 6, сверхтретье, и квинта есть 12 к 8, полуторное, а октава есть система обоих интервалов 12 к 6, двукратное; а октава и квинта вместе суть трёхкратное, то есть отношение разности крайних членов к разности меньших членов; и двойная октава есть отношение среднего члена к его разности с наименьшим членом. Поэтому оно и названо гармоническим.

---

[82] См. II 25, 1. В гармонической прогрессии 3, 4, 6 средний член к малому даёт отношение 4 : 3.

[83] Ср. II 5, 2.

ГЛАВА XXVII

[1] И при делении музыкального канона, когда имеется одна натянутая струна или один авлос с закреплёнными концами, берётся их часть до середины, поочерёдно соответствующей арифметическому, геометрическому и гармоническому средним – на авлосе с помощью отверстия, а на струне с помощью порожка. При этом соответствующие разности устанавливаются и проводятся через средний член мысленно и на самом деле. Ведь разумно и возможно вставить средние, которые соответствуют трём указанным пропорциям, между двумя числовыми членами, будь они нечётными или чётными. И арифметическое среднее будет иметь одинаковые разности с превосходящим и превзойдённым членами, геометрическое будет образовывать с ними подобные отношения, а гармоническое будет разниться с большим и меньшим членами на одинаковую их долю.

[2] И пусть сперва даны два чётных члена, между которыми мы должны вставить три средних и найти, чему они равны. Пусть это будут 10 и 40.

[3] Сначала я вставлю между ними арифметическое среднее. Это 25, и все названные выше свойства здесь сохраняются. Ведь как каждый член относится к самому себе, так и разность к разности, ибо они находятся в равенстве; и на сколько больший член превосходит средний, на столько же средний превосходит меньший; и сумма крайних членов равна удвоенному среднему члену; и отношение меньших членов больше отношения больших; и произведение крайних меньше квадрата среднего на квадрат разности; и средний член разнится с большим и меньшим крайними членами на одну и ту же свою долю, но на разные доли этих крайних.

[4] Если же я вставлю в качестве среднего между этим двумя членами 20, то воспрянут свойства геометрического среднего, а свойства арифметического исчезнут. Ведь теперь больший член будет относиться к среднему, как средний к меньшему; и произведение крайних членов будет равно квадрату среднего; и у разностей наблюдается такое же отношение, как и у членов; и ни крайние члены сами по себе, ни средний член сам по себе не тождественны с избытком и недостатком, но средний и один из крайних, взятые вне очереди;[84] и большие и меньшие члены имеют одно отношение.

[5] Но если в качестве среднего члена я вставлю 16, то вновь свойства двух первых средних исчезнут, а появятся свойства среднего гармонического, стоящего между этими двумя чётными членами. Ведь теперь больший член относится к меньшему, как разность больших членов относится к разности меньших; и на какую часть большего члена средний член оказывается меньше этого большего, на такую же часть меньшего он оказывается больше меньшего; и отношение больших членов больше, а меньших меньше, чего нет у других средних; и сумма крайних членов, умноженная на средний член, вдвое больше произведения крайних.

[84] Поскольку в этом примере разности равны 10 и 20.

[6] Если же два данных члена не будут чётными, но будут нечётными, как 5 и 45, то тогда то же самое число 25 будет давать арифметическое среднее; и причина этого в том, что члены по обе его стороны превосходят его и превосходятся им на одно и то же число, образуя с ним одинаковые разности по количеству. И вставка 15 даёт геометрическое среднее, имеющее с крайними членами трёхкратное и обратное трёхкратному отношения. А если в качестве среднего взять 9, то оно будет гармоническим, ведь оно превосходит меньший член на четыре пятых от этого меньшего члена, и превосходится большим членом на четыре пятых от этого большего члена; и ты найдёшь все вышеупомянутые свойства в полном согласии.

[7] А способ, которым ты можешь систематически вставлять средние члены для трёх названных пропорций, таков. Если тебе даны два члена, будь они оба нечётными или чётными, ты найдёшь их среднее арифметическое, сложив оба края и взяв в качестве среднего половину суммы; или если сочтёшь, насколько больший член превосходит меньший, разделишь это пополам и прибавишь результат к меньшему. А среднее геометрическое ты получишь, если квадрируешь прямоугольник из крайних и возьмёшь получившуюся сторону;[85] или если возьмёшь отношение крайних членов между собой и разделишь его пополам: к примеру, из четырёхкратного отношения ты получишь двукратное. А среднее гармоническое получится, если ты умножишь разность крайних членов на меньший член, приложишь результат к сумме крайних, а потом добавишь ширину приложенного (τὸ πλάτος τῆς παραβολῆς)[86] к меньшему члену.

ГЛАВА XXVIII

[1] Вот то, что относится к трём пропорциям, о которых говорили древние, и мы обсудили их с достаточной ясностью и широтой, потому что они часто и в различных формах встречаются в сочинениях этих авторов. Следующие же пропорции не встречаются в трудах древних, и мы лишь упомянем их вкратце для полноты нашего обзора. [2] Мы расположим их по порядку, чтобы они оказались противоположными трём уже названным первообразам, поскольку они из них получаются и располагаются схожим образом.

[3] Четвёртое среднее называется противоположным, так как оно противоположно гармоническому и само по себе, и по своим свойствам. И оно получается, когда больший из трёх членов так относится к меньшему, как разность между меньшими членами относится к разности между большими; к примеру, 3, 5, 6. Здесь крайние члены имеют двукратное отношение; и понятно, почему это среднее противоположно гармоническому: ведь когда они оба имеют одинаковые крайние члены в одном и том же двукратном отношении, в гармони-

[85] Иначе говоря, извлекая квадратный корень из произведения крайних членов.

[86] Деление продолговатого числа на линейное трактуется здесь геометрически, как приложение площади к отрезку; частное – это получившаяся ширина нового продолговатого числа.

ческом среднем разности больших и меньших членов будут иметь то же самое отношение, а здесь, наоборот, таковым будет отношение разности меньших к разности больших. Знай же, что в этом состоит особенность данного среднего, и произведение большего и среднего членов здесь вдвое больше произведения среднего и меньшего членов, ведь 6×5 вдвое больше, чем 5×3.[87]

[4] Следующие два средних, пятое и шестое, оба идут за геометрическим, а между собой они разнятся в следующем. Пятое среднее таково, что из трёх его членов средний так относится к меньшему, как разность между ними относится к разности между большим и средним членами. К примеру, 2, 4, 5: ведь двойным является и отношение среднего члена к меньшему 4 : 2, и отношение разности меньших членов к разности больших 2 : 1. Противоположным к геометрической пропорции его делает то, что там средний член относился к меньшему, как избыток большего над средним относился к избытку среднего над меньшим,[88] а здесь, наоборот, как разность меньших членов относится к разности больших. Особенность данного среднего заключается в том, что здесь произведение большего и среднего членов вдвое больше произведения большего и меньшего членов, ведь 5×4 вдвое больше, чем 5×2.[89]

[5] Шестое среднее таково, что из трёх его членов больший так относится к среднему, как избыток среднего члена над меньшим относится к избытку большего члена над средним. К примеру, 1, 4, 6, где оба отношения являются полуторными. Здесь тоже имеется причина для противопоставления геометрическому среднему, поскольку отношения тут переставлены, как и в пятом среднем.

[6] Таковы шесть средних, о которых обычно говорили предыдущие авторы, причём три первоначальные восходят ко временам от Аристотеля и Платона до Пифагора, а три других, противоположных этим трём, пришли к нам от их комментаторов и последователей. Четыре оставшихся средних, полученные переменой членов и разностей, не содержатся в писаниях древних, которые полагали их излишними, однако мы бегло рассмотрим их, чтобы не остаться несведущими в этом деле.

[7] Первое из них и седьмое в общем списке получается, когда больший член так относится к меньшему, как их разность к разности меньших членов. К примеру, 6, 8, 9, где оба отношения являются полуторными.

[8] Восьмое среднее, а среди поздних второе, возникает, когда больший член так относится к меньшему, как разность крайних членов относится к разности больших. К примеру, 6, 7, 9, где оба отношения являются полуторными.

[9] Девятое в общем списке, и третье по счёту среди позднее изобретённых, получается, когда из трёх членов какое отношение имеет средний к меньшему, такое же отношение имеет и избыток крайних к избытку меньших. К примеру, 4, 6, 7.

[10] Десятое, заключительное в полном списке и четвёртое среди позднее изобретённых, получается, когда из трёх членов средний так относится к

[87] Это не особенность четвёртого среднего, но лишь свойство конкретного примера.

[88] См. II 24, 3.

[89] И это не особенность пятого среднего, но лишь свойство конкретного примера.

меньшему, как разность крайних относится к разности больших. К примеру, 3, 5, 8, где оба отношения являются дваждысверхтретьими.

[11] Подводя итог, выставим члены всех десяти пропорций в качестве образца для понимания:

первая	1, 2, 3	шестая	1, 4, 6
вторая	1, 2, 4	седьмая	6, 8, 9
третья	3, 4, 6	восьмая	6, 8, 9
четвёртая	3, 5, 6	девятая	4, 6, 7
пятая	2, 4, 5	десятая	3, 5, 8

ГЛАВА XXIX

[1] Нам осталось рассмотреть самую совершенную [пропорцию], трижды протяжённую и объемлющую все рассмотренные средние, и полезнейшую для всякого продвижения в музыке и в учении о природе. Она одна из всех может называться гармонией в собственном истинном смысле, ибо она является не плоскостной, связанной одним средним членом, но имеет два средних члена и три протяжения,[90] подобно тому, как мы объясняли, почему куб является гармонией.[91]

[2] Пусть имеются два крайних трижды протяжённых члена, будь они равно-равно-равными, то есть кубами, или равно-равно-неравными, то есть «плитками» или «балками», или неравно-неравно-неравными, то есть «клиньями»; и пусть между ними обнаруживаются два средних члена, последовательно и перекрёстно сохраняющих одно и то же отношение с крайними членами, причём один из средних членов даёт гармоническую пропорцию, а другой – арифметическую. Необходимо, чтобы при такой расстановке четырёх членов возникла геометрическая пропорция, переплетающая оба средних члена, когда больший член так относится к третьему от него, как второй от него к четвёртому; ведь тогда произведение средних будет равно произведению крайних. И опять же, если больший член имеет со следующим за ним такую же разность, как этот следующий с последним, то такая расстановка порождает арифметическую пропорцию, и сумма крайних будет вдвое больше этого среднего. И если третий член от большего превосходит и превосходится крайними на одну и ту же их часть, он будет средним гармоническим, и произведение его на сумму крайних будет вдвое больше произведения крайних.

[3] Примером такой пропорции будет 6, 8, 9, 12. Здесь 6 есть «клин» $1 \times 2 \times 3$, и 12 получается последовательно как $2 \times 2 \times 3$, а из средних меньшее есть $1 \times 2 \times 4$, а большее $1 \times 3 \times 3$. Крайние члены являются телесными и трижды протяжёнными, и средние относятся к тому же роду. Согласно геометрической [пропорции], 12 к 8 как 9 к 6; согласно арифметической, 12 настолько же превосходит 9, как 9 превосходит 6; согласно гармонической можно видеть, что

[90] Ср. II 24, 6.

[91] Ср. II 26, 2.

какую долю от 6 составляет разница между 8 и 6, такую долю от 12 составляет разница между 12 и 8.

[4] Кроме того, 8 к 6 или 12 к 9 есть кварта в сверхтретьем отношении, и 9 к 6 или 12 к 8 есть квинта в полуторном, и 12 к 6 есть октава в двойном; а оставшееся 9 к 8 есть целый тон в сверхвосьмерном, и он является общей мерой для всех музыкальных отношений, причём самой знакомой, как разность между первыми и элементарными по виду созвучиями.

[10] И всего сказанного выше о проявлениях и свойствах числа для первого *Введения* достаточно.

ПОПРАВКА

На странице 73 первого выпуска второго тома журнала по недосмотру издателя не указано следующее:

«А. И. Щетников выражает благодарность Т. Г. Мякину и А. В. Александровой за возможность ознакомиться с их неопубликованным переводом *Руководства по Гармонике* Никомаха на ранних стадиях этой работы».