ПЕРЕВОДЫ

Прокл Диадох

КОММЕНТАРИЙ К ПЕРВОЙ КНИГЕ «НАЧАЛ» ЕВКЛИДА

ПОСТУЛАТЫ И АКСИОМЫ

От переводчика

Вниманию читателей этого номера журнала *ΣΧΟΛΗ* предлагается перевод одного из разделов комментария Прокла к I книге *Начал* Евклида. Ранее на русском языке издавалось *Введение* к этому комментарию, переведённое Ю. А. Шичалиным. Однако перевода безусловно заслуживает и весь комментарий целиком, поскольку его разделы, посвящённые детальному разбору определений, постулатов, аксиом и предложений I книги *Начал*, представляют интерес как для специалистов, занимающихся историей научной и философской мысли, так и для всех тех, кто любит геометрию и задумывается над тем, в чём состоит смысл преподавания этой древней науки в современной школе.

Данная публикация раздела комментария Прокла, посвящённого постулатам и аксиомам *Начал*, содержательно связана с моей статьёй «Сочинения Платона и Аристотеля как свидетельства о становлении системы математических определений и аксиом», опубликованной во 2 выпуске I тома журнала. В частности, в этой статье обсуждался вопрос о том, следует ли считать четвёртый и пятый постулаты Евклида постулатами в собственном смысле этого слова. Как мы можем видеть из комментария Прокла, этот вопрос далеко не нов.

Приступая к рассмотрению постулатов и аксиом, Прокл делает между ними следующее предварительное различение: «За аксиому берётся то, что напрямую очевидно для нашего знания и легко воспринимается мыслью без какого-либо обучения, тогда как в постулате требуется принять нечто общедоступное и несложное, не нуждающееся для своего принятия в трудном размышлении, ухищрениях или особой подготовке… Постулат предписывает придумать и обустроить некую материю, имеющую простые признаки и легко воспринимаемую; а аксиома говорит о некоем неотъемлемом свойстве, которое само по себе известно слушателям» (179.2–8, 181.5–9). Иначе говоря, постулат относится к построению, а аксиома к знанию.

© А. И. Щетников, 2008

Этому различению Прокл посвящает специальное обсуждение. Пусть постулат – это утверждение о допустимости того или иного простейшего построения. Тогда первые три постулата у Евклида безусловно соответствуют этому определению: ведь в них говорится о возможности простейших построений с помощью линейки и циркуля. Но как тогда быть с четвёртым постулатом о равенстве всех прямых углов и с пятым постулатом о параллельных прямых? Следуя в этом вопросе Гемину, Прокл считает, что эти постулаты, по сути дела, не являются таковыми, и они должны быть доказаны в качестве геометрических теорем. Четвёртый постулат он неким образом и в самом деле доказывает. Что касается пятого постулата, Прокл сообщает нам о том, что его уже пытался доказать Клавдий Птолемей, но его доказательство в действительности является неверным (364.1–368.25). Так что Прокл даёт своё доказательство, опирающееся на утверждения о том, что расстояние между параллельными прямыми является неизменным, а расстояние между пересекающимися прямыми при удалении от точки пересечения становится сколь угодно большим (371.10–373.2). Как мы знаем сегодня, сами эти утверждения являются эквивалентными пятому постулату.

С той же проблемой мы сталкиваемся и при рассмотрении аксиом. Типичным примером аксиомы у Евклида является следующее утверждение: «Если от равных величин отнять равные, то и остатки будут равны». Прокл при обсуждении аксиом склонен держаться того взгляда, что «постулаты присущи геометрической материи, тогда как аксиомы общи всем наукам, имеющим дело с количеством и величиной» (182.7–8). В самом деле, только что приведённая аксиома относится и к числам, рассматриваемым в арифметике, и к непрерывным величинам, с которыми имеет дело геометрия. Но если аксиомы у Евклида являются стандартными правилами вывода для всех математических наук, а не для одной лишь геометрии, то как же тогда быть с аксиомой «две прямые не охватывают пространства», содержащейся в ряде рукописей *Начал*? Прокл склонен считать, что это утверждение надо исключить из списка аксиом, и оно также подлежит доказательству (184.8–10).

Как мы знаем сегодня, попытка Прокла ограничить круг недоказуемых геометрических начал утверждениями о возможности простейших построений и правилами умозаключения для действий с величинами оказалась утопической. Но при этом Прокл с полным на то правом может считаться одним из основателей особого раздела математических исследований, посвящённого основаниям математики. А попытка Прокла доказать пятый постулат была одной из первых в длинном ряду исследований по проблеме параллельных прямых, продолженном сначала учёными исламского Востока, а затем европейскими математиками, и приведшем в итоге к открытию Гауссом, Лобачевским и Больяи неевклидовой геометрии.

Перевод выполнен по изданию *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*, ed. G. Friedlein, Leipzig: Teubner, 1873. При его подготовке я пользовался также английским переводом: *Proclus. A commentary on the first book of Euclid's Elements*, trans. G. R. Morrow, Princeton UP, 1970.

Редакционную работу по вычитке и сверке перевода взяла на себя по моей просьбе И. Е. Берлянд. Я благодарен ей за этот труд, выполненный с большой внимательностью и тактом. Перевод ещё одного раздела, посвящённого определениям, будет опубликован в ближайшем выпуске альманаха *Архэ*, издаваемого исследовательской группой «Диалог культур». Полный перевод комментария готовится к печати.

А. И. Щетников
Центр образовательных проектов ΣΙΓΜΑ,
Новосибирск, schetnikov@ngs.ru

ПОСТУЛАТЫ И АКСИОМЫ

[178] Геометрические начала делятся натрое: это предположения (ὑποθέσεις), постулаты (αἰτήματα) и аксиомы (ἀξιώματα), разницу между которыми мы уже объяснили выше [1]. Теперь же я ещё тщательнее разъясню различие между постулатами и аксиомами, ведь этот раздел нашей работы посвящён именно им. А предположения и так называемые определения уже рассмотрены выше.

Общее для аксиом и постулатов то, что они не требуют некоторого доказательства или геометрической веры, но берутся как известные и оказываются началами для последующего. А различаются они между собой так же, как теоремы и задачи [2]. Как в теореме предлагается увидеть связь и познать добавляемое к основанию, [179] а в задаче требуется нечто предъявить и произвести, так и в аксиомах берётся то, что само по себе очевидно для знания и воспринимается нашей мыслью без обучения, тогда как в постулатах мы принимаем нечто общедоступное и несложное, не нуждающееся для своего принятия в трудном размышлении, ухищрениях или подготовке. Так что очевидное бездоказательное знание и безыскусное принятие отличает аксиомы и постулаты, тогда как доказательное знание и подготовленное принятие отличает теоремы и задачи.

Начала всегда должны отличаться от следующего за ними простотой, бездоказательностью и самодостоверностью. «В общем, – говорит Спевсипп [3], – в охоте за знанием наша мысль без особых ухищрений выставляет их наперёд и готовит для будущих поисков, и имеет с ними более ясное соприкосновение, нежели зрение с видимыми вещами, а прочее она не может взять напрямую и продвигается к нему по шагам, доказывая и уловляя последовательно». К при-

[1] См. 76.6.

[2] См. 77.7.

[3] Племянник Платона и первый схоларх Академии.

меру, требование провести прямую линию от точки до точки наша мысль принимает легко и без затруднений. Ведь продвигаясь из точки ровным потоком и не отклоняясь ни в ту, ни в другую сторону, [180] прямая достигает другой точки. И если один из двух концов прямой неподвижен, то другой, двигаясь вокруг него, без каких-либо затруднений описывает круг. Но если мы захотим начертить спираль в один оборот, нам потребуется более сложное устройство, поскольку она производится многообразным движением; и чтобы построить равносторонний треугольник, нужен особый метод построения треугольника. Геометрический ум говорит мне, что когда я думаю о прямой, один конец которой закреплён, а другой движется вокруг него, и по ней от её неподвижного конца движется точка, я описываю спираль в один оборот: ведь если конец описывающей круг прямой достигнет начала движения в то же самое время, когда точка пройдёт всю прямую, они произведут именно такую спираль. И опять, если я опишу два равных круга, соединю точку их пересечения с центрами кругов и проведу прямую от одного центра до другого, я получу равносторонний треугольник. Для завершения этого нужно сделать много простых шагов от первых понятий, и мы предпочтём при построении следовать этим путём. Проходит ли такое построение легко или трудно, и ведётся ли доказательство через большее или меньшее число средних терминов, зависит от свойств изучаемого; вообще же нужда в построении [181] или доказательстве связана с тем, что искомое лишено ясности постулатов и аксиом. Аксиомы же и постулаты, как я уже сказал, должны быть простыми и легко принимаемыми, причём постулат предписывает придумать и обустроить некую материю, имеющую простые признаки и легко воспринимаемую, аксиома же говорит о некоем неотъемлемом свойстве, которое само по себе известно слушателям, вроде того, что огонь горяч, или чего-нибудь ещё самоочевидного, так что о том, кто его отвергает, мы говорим как о лишённом чувств или нуждающемся в толчке. Так что постулаты и аксиомы относятся к одному роду, а чем они различаются, уже сказано. Как мы уже объяснили, оба они суть бездоказательные начала, одно таким образом, другое иным.

Однако некоторые предпочитают все их называть постулатами, равно как всё искомое – задачами. Так, Архимед [4] в начале книги *О равновесии* пишет: «Потребуем (αἰτούμεθα), чтобы равные тяжести на равных длинах уравновешивались». Но можно сказать, что это скорее аксиома. Другие все их называют аксиомами, равно как всё, требующее доказательства, – теоремами. Кажется, что из-за этой аналогии они превратили специальное имя в общее. [182] И всё-таки, как задача отличается от теоремы, так и постулат – от аксиомы, хотя оба они и не требуют доказательства: первый принимается в силу лёгкости построения, со второй соглашаются в силу лёгкости познания.

[4] Архимед (282–212 до н. э.) — крупнейший древнегреческий математик, механик и инженер.

Гемин [5] отличает постулат от аксиомы при помощи этого рассуждения; другие же говорят, что постулаты присущи геометрической материи, тогда как аксиомы общи всем наукам, имеющим дело с количеством и величиной. Ведь это геометр знает, что все прямые углы равны и что ограниченную прямую можно продолжить по прямой, тогда как равенство между собой равных одному и тому же – это общее понятие, которым пользуются арифметика и другие науки, применяя общее к своей материи. А Аристотель, как сказано выше [6], говорит, что постулат доказывается, и даже если учащийся с ним не согласен, он всё равно берётся в качестве начала; тогда как аксиома является недоказуемой, и все склонны её принять, даже если кто-нибудь на словах станет её оспаривать.

Так что их можно различать трояко, и первое различение основано на том, что постулат относится к построению, а аксиома – к знанию. Поэтому ясно, что равенство всех простых углов постулатом не является. Также не является постулатом и пятый постулат: если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, [183] меньшие двух прямых углов, эти две прямые при их неограниченном продолжении встречаются с той стороны, с которой углы меньше двух прямых углов. Ведь эти утверждения приняты не ради построения: они лишь показывают признаки, относящиеся соответственно к равным углам и к прямым, продолженным с той стороны, где углы меньше двух прямых углов.

Согласно второму различению, не будет аксиомой то, что две прямые не охватывают площади, хотя некоторые относят это утверждение к аксиомам. Ведь оно имеет дело с геометрической материей, как и то, что все прямые углы равны между собой.

Согласно третьему различению Аристотеля, всё, чему мы верим через доказательство, будет постулатом, тогда как недоказуемое является аксиомой. Так что напрасно Аполлоний [7] пытался доказывать аксиомы. Гемин правильно отметил, что одни выдумывают доказательства недоказуемого и стремятся утвердить общеизвестное с помощью менее известных средних терминов, и так поступает Аполлоний, когда он пытается доказать истинность аксиомы о том, что равные одному и тому же равны между собой [8], – тогда как другие подлежащее доказательству включают в недоказуемое, как поступает сам Евклид с пятым и четвёртым постулатами. Ведь некоторые считают их двусмысленными и требующими доказательства. И разве не смешно, что к недоказуемому отнесено то, обратные чему теоремы являются доказуемыми? Ведь то, что внутренние углы при встре-

---

[5] Гемин Родосский (I в. до н. э.) — астроном и математик, ученик Посидония. Гемину принадлежит один из первых комментариев к *Началам*, до нас не дошедший. Сохранилась его астрономическая работа *Введение в явления*.

[6] См. 76.8.

[7] Аполлоний Пергский — один из крупнейших древнегреческих геометров, живший в конце III в. до н. э., автор фундаментальных *Конических сечений* и ряда других сочинений.

[8] См. 194.20.

чающихся прямых меньше двух прямых углов, сам Евклид доказывает в следующей теореме: [184] «Во всяком треугольнике любые два угла меньше двух прямых» [9]. Также ясно доказывается и то, что угол, равный прямому углу, не всегда является прямым углом [10]. И нельзя допустить, как говорит Гемин, чтобы обратные этим теоремам утверждения оставались недоказуемыми. Так что в этом перечне имеются только три постулата, а оставшиеся два, как и обратные к ним, требуют доказательного знания; и излишне также включать в аксиомы утверждение о том, что две прямые не охватывают площадь, поскольку уверенность в нём обретается через доказательство. О различии постулатов и аксиом сказано достаточно.

Возвращаясь к аксиомам, отметим, что одни из них относятся к арифметике, другие – к геометрии, третьи – к обеим наукам. То, что всякое число измеряется единицей, – это аксиома арифметики; то, что равные прямые совпадают при наложении и что всякая величина делима до бесконечности – это аксиомы геометрии; а то, что равные одному и тому же, равны между собой и подобные ей являются общими аксиомами для обеих наук. Однако каждая наука применяет их к своему предмету: геометрия к величинам, арифметика к числам.

Также и среди постулатов одни относятся к частным наукам, другие являются общими. Допущение о разделении числа на наименьшие части – это постулат арифметики; допущение продолжить по прямой всякую конечную прямую – это постулат геометрии; а допущение об увеличении всякой величины до бесконечности – это постулат, общий для обеих наук. Ведь это могут испытывать и число, и величина.

[185] **Постулаты 1–3.** *Требуется от всякой точки до всякой точки проводить прямую линию, ограниченную прямую линию непрерывно продолжать по прямой, и из всякого центра всяким раствором проводить круг.*

Эти три требования, из-за их ясности и полезности, необходимы нам среди постулатов, во всяком случае, если следовать Гемину. Проведение прямой линии от всякой точки до всякой точки следует из того, что линия является течением точки, и из того, что линия является ровным и неуклонным потоком. Ведь, вообразив точку, движущуюся ровным и кратчайшим движением, мы придём к другой точке, и тем самым получим первый постулат, ничего к нему больше не домысливая. А если мы возьмём прямую, оканчивающуюся в точке, и представим, как её конец движется дальше кратчайшим и ровным движением, тем самым легко и просто будет получен второй постулат. Если же мы представим ограниченную прямую с одним неподвижным концом и обведём другой конец вокруг неподвижного, получится третий постулат этого рода. Ведь неподвижная точка будет центром, а прямая – раствором; и какой бы ни случилось ей быть, таким будет и расстояние, отделяющее центр от окружности.

---

[9] Предложение I.17.

[10] А именно если этот угол не является прямолинейным: см. 184.3.

Если кто-нибудь спросит, как мы можем вводить движение в недвижные геометрические сущности [186] и двигать то, что не имеет частей, что совершенно невозможно, мы сочтём его плохо запомнившим то, что говорилось во *Введении* о наличном в воображении, а именно, что логосы записывают в нём образы всего того, что имеется в этих логосах в разуме [11]. И эта незаполненная доска будет конечным и воспринимающим умом. Но это не устраняет трудности: ведь ум, получающий образы, получает их через движение. Однако будем думать об этом движении не как о телесном, но как о воображаемом и допустим не то, что не имеющее частей движется телесным движением, но то, что оно является основой для путей воображения. Ведь ум, не имея частей, движется не переместительно; и воображение, будучи неделимым, движется своим особым движением. Рассматривая телесные движения, мы забыли о движениях, не имеющих протяжения. Не имеющее частей свободно от телесных мест и внешних движений; однако с ним связан другой вид движения и другое место, которое может созерцаться в его движении. Мы говорим, что точка обладает положением в воображении, и не спрашиваем, как не имеющее частей может где-либо двигаться и охватываться некоторым местом; ведь место для протяжённого само обладает протяжением, а место для не имеющего частей само не имеет частей. Поэтому особенности для геометрических видов одни, а для того, что на них основано, – другие; и телесное движение – одно, а представляемое в воображении – другое; [187] и место для протяжённого одно, а для не имеющего частей – другое. Мы должны разделять их и не смешивать, чтобы не тревожить существо вещей.

И похоже, что первый из этих трёх постулатов образно показывает нам, как сущее объемлется и ограничивается своими неделимыми причинами, и что оно уже исходно ими охвачено со всех сторон: ведь прямая связывает наличные точки одну с другой, и охватывается ими, и лежит между ними. Второй постулат показывает, как сущее выходит из своих собственных начал ко всему прочему, сохраняя непрерывность и не отрываясь от них, но через бесконечную мощь причин разворачиваясь вовне себя. А третий постулат показывает, как всё, что выходит наружу, возвращается к своим началам; ведь обращение подвижного вокруг неподвижного подражает круговому возвращению.

Следует понимать, что бесконечное продолжение присуще не всем линиям. Его нет ни у окружности, ни у циссоиды, ни у очерчивающих фигуру линий в целом, ни даже у некоторых линий из тех, которые фигуру не производят. Ведь не может бесконечно продолжаться не только спираль в один оборот, ибо она лежит между двух точек [12], но и любая другая линия, производимая таким образом. И невозможно провести от всякой точки до всякой любую линию, ведь не всякая линия может лежать между всякими точками. Но хватит об этом, и пойдём дальше.

---

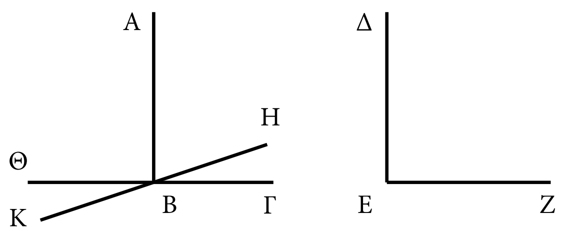
[11] См. 51.13–54.14.

[12] Архимедова спираль может быть продолжена и далее, на любое число оборотов; такое продолжение спирали выполняет и сам Архимед в книге *О спиралях*.

[188] **Постулат 4.** *И чтобы все прямые углы были равны друг другу.*

Если мы согласимся с тем, что это утверждение очевидно и не требует доказательства, то оно, согласно Гемину, окажется не постулатом, а аксиомой. Ведь оно говорит о том, что присуще прямым углам, и не приводит к построению через простое понятие. Оно не будет постулатом и по делению Аристотеля: ведь он полагает, что постулат требует доказательства. Но если мы скажем, что оно доказывается, и будем искать этого доказательства, то и тогда по Гемину оно не будет отнесено к постулатам.

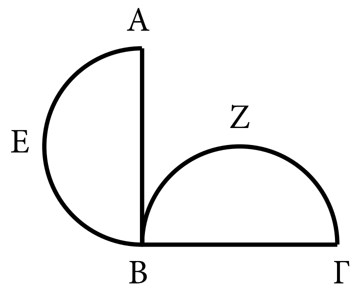
Равенство всех прямых углов проясняется в нашем общем понятии (κατὰ τὰς κοινὰς ἡμῶν ἐπινοίας): ведь имея логос единицы и будучи границей для бесконечного увеличения и уменьшения различных углов, всякий прямой угол равен всякому прямому углу. Ведь мы устанавливаем первый прямой угол, образуя равные углы по обе стороны от прямой, приставленной к другой прямой. Чтобы доказать этот постулат на чертеже, возьмём два прямых угла АВГ и ΔEZ. Я утверждаю, что они равны. Ведь если не равны, то один из них больше. Пусть это будет угол при В. Если ΔЕ наложить на АВ, то EZ окажется внутри, [189] допустим по ВН; и я продлю ВГ до Θ. Поскольку угол АВГ – прямой, будет прямым и угол АВΘ, и они равны между собой (ведь по определению прямой угол равен своему смежному). Тем самым угол АВΘ будет больше угла АВН. Продлю ВН до К. Поскольку угол АВН – прямой, будет прямым и равным ему угол, сопряжённый с АВН. Тем самым угол АВК равен углу АВН, так что угол АВΘ будет меньше угла АВН; но он больше, что невозможно. Так что прямой угол не может быть больше прямого угла.



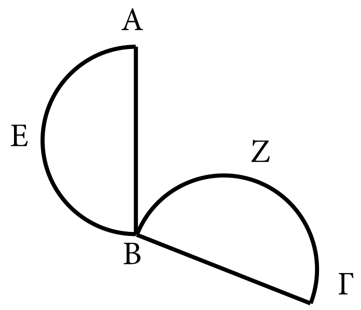
Это доказательство, приведённое другими комментаторами, не заслуживает большего внимания. Но Папп[13] верно указывает нам, что противоположное утверждение не является истинным, ибо не всякий угол, равный прямому углу, будет прямым, но только прямолинейный – ведь можно показать, что угол с круговыми границами равен прямому углу, но ясно, что такой угол мы не отнесём к прямым. Ведь при рассечении прямолинейных углов мы получили прямой угол, установив прямую на другую прямую так, чтобы она не была наклонена, так что не всякий угол, равный прямому, будет прямым, но только прямолинейный.

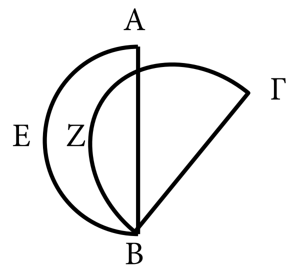
[13] Папп Александрийский (конец III – начало IV вв. н. э.) — автор *Собрания* в восьми книгах, в котором обозревается весь материал греческой геометрии, а также комментария к *Началам* Евклида, из которого сохранился в арабском переводе только комментарий к десятой книге.

Представим две равных прямых линии AB и BΓ, [190] проведённые под прямым углом в B, и построим на них равные полукруги AEB и BZΓ, проведя их с нужными центрами и радиусами. Поскольку полукруги равны, они совпадают при наложении, и угол EBA равен углу ZBΓ. Прибавим к ним общий остаток ABZ. Но тогда целый прямой угол будет равен лунообразному углу EBZ. Но лунообразный угол не является прямым. С другой стороны, если бы угол ABΓ был тупым или острым, можно было бы показать, что он равен лунообразному углу: ведь этот вид угла с круговыми границами всегда соотнесён с прямым углом.



Надо заметить ещё, что в случае прямого и тупого угла мы должны добавлять угол, лежащий между прямой AB и окружностью BZ, а в случае острого – отнимать. Ведь тогда прямая AB пересекает окружность BZ. Оба этих случая изображены на чертежах.





[191] Эти чертежи подтверждают и то, что все прямые углы равны между собой, и то, что не всякий угол, равный прямому, сам является прямым. Ведь если он даже не является прямолинейным, как его можно назвать прямым?

Из этого постулата также ясно, что прямой угол сродни равенству, а острый и тупой – неравенству. Прямой угол находится в одном столбце с равенством (ведь оба они записаны под пределом, как и подобие), а острый и тупой – с неравенством, как и неподобие; ибо все они порождены беспредельным [14]. И потому одни, рассматривая в углах количество, говорят, что прямой угол равен прямому углу, другие же, глядя на качество, говорят об их подобии. Ведь равенство среди количеств – это то же самое, что подобие среди качеств.

---

[14] Речь идёт о пифагорейском парном разделении начал, описанном Аристотелем в *Метафизике* 986 a 22–26.

Постулат 5. *И если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых углов, эти две прямые при их неограниченном продолжении встречаются с той стороны, с которой углы меньше двух прямых углов.*

Это утверждение надо совсем вычеркнуть из списка постулатов. Ведь это теорема, связанная со многими трудностями, которые Птолемей [15] попытался разрешить в одной из своих книг [16], и её доказательство опирается на многие определения и теоремы. И сам Евклид обратное к нему утверждение [192] доказывает как теорему [17]. Однако некоторые ошибочно считают его постулатом, поскольку мы принимаем на веру тот факт, что когда указанные углы меньше двух прямых, эти прямые сходятся и встречаются. Гемин дал им прямой ответ, сказав, что от основателей этой науки мы научаемся тому, чтобы в доводах, принятых в геометрии, не обращать никакого внимания на правдоподобие наших представлений. И Аристотель сказал, что равно нелепо как довольствоваться верой в математике, так и требовать доказательств от ритора [18]. И Симмий у Платона говорит, что «те, кто производит доказательства, основанные на вере, по сути, не отличаются от бахвалов» [19]. И хотя то, что при углах, меньших двух прямых, прямые линии сходятся, истинно и необходимо, всё же то, что, сходясь при продолжении всё больше, они тем самым когда-нибудь встретятся, лишь правдоподобно, но не необходимо, пока не доказано, что для прямых это истинно. Ведь несмотря на то, что существование линий, которые неограниченно сближаются, но никогда не встречаются, кажется невероятным и парадоксальным, это всё-таки истинно и наблюдается в других видах линий. Но почему тогда для прямых линий невозможно то, что для других линий возможно? [193] Так что пока мы не доказали, что они встречаются, сказанное о других линиях будет служить отводом для нашего воображения. И хотя рассуждения, оспаривающие возможность встречи этих линий, заключают в себе много поразительного, разве мы не станем лишь сильнее ограждать нашу традицию от всего того, что основано на вере, а не на разумном суждении?

Поэтому ясно, что нам надлежит искать доказательство предложенной теоремы, так как ей чужды особенности постулата. Но о том, как она доказывается и какими доводами уничтожаются выставленные против неё возражения, мы скажем, когда сам автор *Начал* соберётся её упомянуть и ей воспользоваться. Тогда и надо будет показать, что она не относится к недоказуемым, но познаётся через доказательство.

---

[15] Клавдий Птолемей (II в. н. э.), александрийский астроном, географ и математик.

[16] См. ниже, 365.7.

[17] Предложение I.17: в треугольнике сумма двух внутренних углов меньше двух прямых.

[18] Аристотель, *Никомахова этика* 1094 b 26.

[19] Платон, *Федон* 92 d.

Аксиомы 1–5. *Равные одному и тому же равны между собой; и если к равным добавить равные, то и целые будут равны; и если от равных отнять равные, то и остатки будут равны; и целое больше части; и совпадающие равны между собой.*

Эти утверждения обычно называют недоказуемыми аксиомами, поскольку они всеми уважаются (ἀξιοῦται) и никто их не оспаривает. Ведь аксиомой обычно называют всякое простое предложение, которое либо обладает непосредственной подлинностью, либо требует некоторого напоминания. А последователи [194] Стои по обыкновению называли аксиомой всякое простое утвердительное предложение, и когда они пишут для нас руководства по диалектике под названием *Об аксиомах* [20], они стремятся прояснить это в самом названии. Но некоторые более тщательно отличали аксиомы от других предложений, как непосредственные и самоочевидные, и называли их так за очевидность, как это делали Аристотель и геометры, согласно которым аксиома – это то же самое, что и общее понятие (ἔννοια κοινή). Мы присоединяемся к похвалам геометру Аполлонию, который, в отличие от Евклида, считал и аксиомы подлежащими доказательству; ведь тот причислил доказуемое к постулатам, а этот попытался отыскать доказательства для недоказуемого. Однако доказуемое и недоказуемое различаются между собой по природе; и в науках выделяется род неопосредованных предложений, которые из-за их очевидности используются во всяком доказательстве, когда их берут в качестве начал и пользуются ими в общих умозаключениях.

Найденное Аполлонием доказательство первой аксиомы предполагает такое опосредование, которое не более известно, чем заключение, и едва ли даже не больше него может оспариваться – чтобы увидеть это, достаточно бросить на это доказательство беглый взгляд. «Пусть А равно В, [195] и В равно Г. Я утверждаю, что А равно Г. Ведь А, будучи равным В, занимает то же самое место, и В, будучи равным Г, занимает то же самое место. Но тогда А занимает то же самое место, что и Г. Поэтому они равны».

Это доказательство опирается на два утверждения: во-первых, что занимающие одно и то же место равны между собой, во-вторых, что занимающие одно и то же место с одним и тем же сами также занимают одно и то же место. Ясно, что они темнее предложенной аксиомы. В самом деле: как равны занимающие одно и то же место? Целиком, или по частям, или отношением очертаний? Ведь не так просто перейти к рассмотрению места, которое менее известно для нас, нежели то, что его занимает, ибо отыскание его сущности окажется более трудным и спорным. Чтобы не множить слов, мы будем считать всякую аксиому непосредственной и самоочевидной, известной из собственного бытия и верной. Тот, кто доказывает самоочевидное, не подтверждает его истину, но уменьшает ту очевидность, которая у него была, когда мы приняли его без доказательства.

Так что примем это в качестве признака, отличающего аксиомы, – а также и то, что все они относятся к общему роду в математике. Ведь каждая из них относится

[20] Ср. SVF II 193.

не только к величинам, [196] но также и к числам, движениям и временам. И это необходимо. Ведь равное и неравное, целое и часть, большее и меньшее являются общими и для разделённых, и для непрерывных количеств. Все они берутся за очевидные в теориях, имеющих дело и со временем, и с движением, и с числами, и с величинами; и для всех них истинно то, что равные одному и тому же равны между собой, а также и всё прочее, что мы принимаем. И хотя они – общие, каждая теория берёт их для своей материи, поскольку они в ней востребованы: одна для величин, другая для чисел, третья для времён. Так общие аксиомы порождают особые заключения в каждой науке.

И не надо сводить их к меньшему числу, как сделал Герон, предложивший только три; ведь то, что целое больше части, – это тоже аксиома, которую наш геометр неоднократно привлекает для доказательств; и то, что совпадающие при наложении равны, напрямую применяется к искомому в четвёртой теореме. Но не надо и добавлять к ним никаких других, одни из которых присущи лишь геометрической материи, как та, что две прямые не охватывают площадь, – ведь аксиомы, как было сказано, относятся к общему роду; другие же следуют из уже принятых, как та, что удвоенные одного и того же равны между собой, – ведь это следует из того, что если к равным добавить равные, то и целые будут равны. Ибо если к равным половинам [197] прибавить равные половины, то в удвоении получатся равные между собой, по свойству прибавления равных. В этом отношении не только удвоенные, но также и утроенные и вообще любые многократные будут равны.

Папп говорит, что к этим аксиомам надо приписать и ту, что если к равным прибавить неравные, то разность целых будет равна разности прибавляемых, и наоборот, если к неравным прибавить равные, то разность целых будет равна разности исходных. Но хотя эти утверждения очевидны, они доказываются следующим образом. Пусть A и B равны, и к ним прибавляются неравные Γ и Δ, и Γ превосходит Δ на E. Поскольку A равно B и Z равно Δ, то и AZ равно BΔ. Ведь если к равным добавить равные, то и целые будут равны. Но AΓ превосходит BΔ только на E, то есть только на то, на что Γ превосходит Δ. И опять, пусть Γ и Δ не равны, и к ним прибавляются равные A и B, и Γ превосходит Δ на E. Поскольку A равно B и AZ равно BΔ, [198] целое AΓ превосходит BΔ только на E, то есть на то, на что Γ превосходит Δ.

Всё это следует из введённых ранее аксиом и правильно исключено из большинства рукописей. Прочее из того, что он [Папп] добавил, также предварено определениями и следует из них: и то, что все части плоскости и прямой совпадают друг с другом (ведь всё натянутое к краям имеет такую природу); и то, что точка делит линию, линия делит поверхность, поверхность делит тело (ведь всё, что ограничивает нечто, его же и делит); и то, что в величинах имеется беспредельное и по прибавлению, и по измельчению, и то и другое в возможности (ведь всё непрерывное делится и растягивается до бесконечности).