# ТРАДИЦИЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ: ПОПЫТКА РЕКОНСТРУКЦИИ

А. И. Щетников
ООО «Новая школа», Новосибирск
schetnikov@ngs.ru

Andrey Shetnikov
“New Scholol” Ltd, Novosibirsk, Russia

The tradition of Arithmetical riddle problems. An attempt of reconstruction

Abstract. The survey is devoted to the history of “arithmetical riddle problems” found in Diophantus’ *Arithmetica*, *Anthologia Palatina*, ancient Chinese *Nine chapters of the mathematical art,* The *Book of Abacus* of Fibonacci, Medieval Armenian “Questions and solutions”, some Arabian and Indian sources, etc. Many well-known “arithmetical riddle problems” known from our school textbooks were invented a long time ago – in Hellenistic antiquity, if not earlier. As a rule, their solving was based on techniques of oral arguments and account, which are restored in this paper.
Keywords: ancient and medieval arithmetic, school mathematics.

**Введение**

Некоторые арифметические задачи «на сообразительность» в наших школьных учебниках имеют очень долгую историю. Мы зачастую даже не догадываемся, насколько долгой она является. Мы можем сказать: по виду это задача из старинного задачника по арифметике, такие задачи решали еще в XIX, а может быть и в XVIII веке. Но мы сильно удивимся, если узнаем, что эту же задачу решали много веков назад в средневековых школах, а до этого — в древней Греции или даже в древнем Египте.

Трудно найти человека, который бы не знал задачу про волка, козу и капусту. Однако многим неожиданно будет узнать, что она, наряду с тремя другими популярными задачами на переправу через реку, содержалась в сборнике *Propositiones ad acuendos juvenes* (*Предложения для изощрения юношества*), составленном во время каролингского возрождения; возможно, что составителем этого сборника был Алкуин (735–804), выдающийся ученый при дворе Карла Великого.

В этом же сборнике имеется несколько арифметических задач с зачином условия «на 100 монет купили 100 животных», в которых предлагается решить в натуральных числах систему из двух уравнений с тремя неизвестными. Эта же задача содержится в других средневековых сборниках, в том числе — индийских и арабских, что не выглядит удивительным, тем более что и в одной из задач Алкуина речь идет о торговце с востока, который на 100 денариев покупает 100 верблюдов, ослов и овец. Однако задача с условием «на 100 цяней купили 100 птиц» имеется также в китайском сборнике V века, и это заставляет задуматься как о наличии общего источника традиции, так и о путях, которыми эта традиция была передана в столь далекие друг от друга страны.

Как неоднократно подчеркивал в своих работах датский историк математики Йенс Хойруп (см., например, Høyrup 1990), занимательные задачи придумывались и передавались в кругу людей, практика которых была связана с измерениями и вычислениями. Человек, способный решить трудную задачу, демонстрирует свой навык и сообразительность; приемы решения таких задач запоминаются и ценятся как средства демонстрации этой сообразительности.

В работах Хойрупа обсуждается и механизм передачи занимательных задач между географически удаленными культурами. Передатчиками традиции здесь могут выступать караванные торговцы — люди сообразительные, любознательные, знающие несколько языков. Уже к концу II в. до н. э. на Евразийском континенте складывается протяженная сквозная сеть караванных путей, соединившая все великие цивилизации Старого Света, и известная как Великий шелковый путь. Занимательные задачи могли передаваться вдоль караванных путей — вместе с шелком и другими предметами роскоши. Хойруп даже называет их «задачами караванных стоянок» (camp fire riddles).

Другая сторона дела, которую я хочу обсудить в этой статье, связана с устными приемами, которыми решаются многие из этих задач. Я склонен предполагать, что многие задачи этого круга были придуманы сразу же вместе с красивыми приемами их решения, — а потом эти приемы забывались из-за прерывания устной традиции и замещались более громоздкими арифметическими или алгебраическими техниками. Было бы странно, если бы задача на сообразительность с самого начала подразумевала длинное письменное решение — ведь тогда у нее просто не было бы шанса удержаться в устной традиции, сохраняющей лишь отборный материал.

### Источники

• *Арифметика* Диофанта Александрийского (III век н. э.). Собранные здесь задачи по большей части не являются элементарными. Однако в I книге имеются и относительно простые задачи. Тексты задач из *Арифметики* и их решения приведены ниже в буквальных переводах; при этом диофантова символика заменена на современную, как это обычно делается в современных изданиях Диофанта.

• *Вопросы и ответы*. Небольшой сборник арифметических задач, составленный Ананием Ширакаци, армянским просветителем VII века. Ширакаци получил образование у греческих учителей в Трапезунде, и затем внедрял греческую ученость у себя на родине. Перевод этого задачника на русский язык был издан академиком Иосифом Орбели в 1918 году в Петрограде. В книге задачи приведены без решений, так что решения к ним я составил сам.

• *Палатинская антология*. Византийское собрание древнегреческих эпиграмм, датируемое X веком. XIV книга этого собрания включает в себя 45 математических задач. Ее составление приписывается Метродору, предположительно жившему в первой половине VI века. Эти задачи приведены в антологии без решений, так что все решения к ним я написал сам.

• *Книга абака*. Математический труд Леонардо Пизанского (1175–1240), известного под прозвищем Фибоначчи. Леонардо собрал обширную коллекцию задач, восходящих к арабским, греческим и латинским источникам. Решения Леонардо я переписал на свой манер, сохраняя их основную идею.

• *Математика в девяти книгах*. Древнекитайский трактат, составленный в эпоху Хань (II–I вв. до н. э.). Как пишет в своем предисловии Э. И. Березкина, «уже первое рассмотрение данного трактата ставит вопрос о связях Китая с Индией, Вавилоном и, быть может, с другими странами; во всяком случае оно свидетельствует о важных параллелях в математике этих стран» (Березкина 1957).

### Завтрак у фонтана

(***Книга абака XII***) *У одного человека было 3 лепешки, а у другого — 2 лепешки. Они решили присесть и перекусить у фонтана. К ним подошел солдат, и они пригласили его присоединиться к трапезе. После еды солдат за-*

*платил им 5 бизантиев. Первый взял себе 3 бизантия, а второй — 2 бизантия. Был ли справедливым такой раздел?*

Очень красивая задача. Ее хорошо предлагать детям, пришедшим на занятия математического кружка, при первом знакомстве. Большинство школьников, не задумываясь, признают такой раздел справедливым. А ведь это неправильно!

Решение. Разделим каждую из 5 лепешек на 3 части — всего получится 15 частей. Каждый участник съел по 5 таких частей. У первого было 9 частей, 5 из них он съел сам, а 4 части отдал солдату. У второго было 6 частей, 5 он съел сам, а 1 часть отдал солдату. Так что деньги надо делить в отношении 4 к 1. Поэтому первому человек надо отдать 4 бизантия, а второму — 1 бизантий.

### Все без одного

(**Книга абака XII**) *Было четыре человека. У первого, второго и третьего в сумме было 27 денариев. У первого, третьего и четвертого — 34 денария. У первого, второго и четвертого — 37 денариев. Наконец, у второго, третьего и четвертого — 31 денарий. Сколько денег было у каждого?*

Решение. Сложив все данные вместе, получим 129. Деньги каждого человека учтены в этой сумме трижды. Разделив 129 на 3, получим, что общая сумма денег равна 43 денариям. Таким образом, у первого человека было 43 – 31 = 12 денариев, у второго 9, у третьего 6, у четвертого 16.

В точности такую же задачу рассматривает Диофант. Он формулирует условие задачи в общем виде, потом указывает ограничения, при которых существует решение в положительных числах, затем рассматривает частный числовой пример, для которого и разбирает решение.

(**Арифметика I, 16**) *Найти четыре таких числа, чтобы они, сложенные по три, давали заданные числа. Нужно, чтобы третья часть всех четырех была больше каждого из них. Пусть случится так, что три числа по порядку от 1-го вместе дают 20, три числа от 2-го вместе дают 22, три от 3-го дают 24, три от 4-го дают 27.*

Технику Диофанта принято называть «синкопированной алгеброй», и его способ мало пригоден для решения в уме. Он вводит письменное обозначение для неизвестного и затем делает по ходу своего рассуждения вспомогательные записи.

Решение. Пусть все четыре вместе будут $x$. И если от $x$ отнять 1-ую тройку, то есть 20, то останется 4-е число, то есть $x - 20$. Таким же образом 1-е число будет $x - 22$, 2-е число будет $x - 24$, 3-е число будет $x - 27$. Осталось сложить все 4 числа, и получится $x$. Но эта же сумма будет $4x - 93$; это равно $x$. И $x$

получается равным 31. К подстановкам: 1-е число будет 9, 2-е будет 7, 3-е будет 4, 4-е будет 11. И они удовлетворяют задаче.

### Умножение и трата денег

Из доступных источников впервые такая задача встречается у Анания Ширакаци:

(**Вопросы и ответы 19**) *Один муж зашел в три церкви и просил Бога в первой: «Подай мне столько, сколько у меня есть, и дам я Тебе двадцать пять дахеканов». И во второй церкви так же просил он и дал двадцать пять дахеканов, и в третьей так же, и ничего у него не осталось. Итак, узнай, сколько у него прежде было.*

На занятиях математического кружка мы учим школьников решать аналогичные задачи «с конца».

Решение 1. Перед третьей церковью у этого мужа было $(0 + 25) : 2 = 12\frac{1}{2}$ дахеканов; перед второй церковью — $(12\frac{1}{2} + 25) : 2 = 18\frac{3}{4}$ дахеканов, перед первой церковью — $(18\frac{3}{4} + 25) : 2 = 21\frac{7}{8}$ дахеканов.

Аналогичную задачу приводит Леонардо Пизанский. Однако он решает ее не с конца, но замечательным способом, в основе которого лежит подсчет убытков, понесенных из-за непредусмотрительной траты денег. Этот раннекапиталистический взгляд на вещи, просвечивающий через текст математической задачи, приводит меня в большой восторг. Решение Леонардо я передаю в своем пересказе.

(**Книга абака XII**) *Некто поехал в Лукку по торговым делам, удвоил там свои капиталы и потратил 12 денариев. Потом он поехал во Флоренцию, вновь удвоил свои капиталы и вновь потратил 12 денариев. Потом он поехал в Пизу, вновь удвоил свои капиталы и вновь потратил 12 денариев, после чего обнаружил, что все деньги потрачены. Сколько денег у него было в начале?*

Решение 2. Разберемся сначала, сколько денариев потерял этот человек. Вы думаете, 36? Ничего подобного! Когда он тратит 12 денариев в Лукке, он теряет возможность превратить их в 24 денария во Флоренции и в 48 денариев в Пизе. Когда он тратит 12 денариев во Флоренции, он теряет возможность превратить их в 24 денария в Пизе. А еще он в самой Пизе потратил 12 денариев. Так что всего он потерял $48 + 24 + 12 = 84$ денария. А нам надо узнать, каким был его первоначальный капитал. Каждый денарий своего исходного капитала купец мог тремя последовательными удвоениями превратить в 8 денариев. Поэтому в начале у него было $84 : 8 = 10\frac{1}{2}$ денариев.

### Путь через заставы

(***Вопросы и ответы 11***) *Один купец прошел через три города, и взыскали с него пошлины — в первом городе половину и треть имущества, и во втором городе половину и треть, и в третьем городе снова половину и треть; и когда он прибыл домой, у него осталось 11 дахеканов. Итак, узнай, сколько всего дахеканов было вначале у купца.*

*Решение*. Если с купца каждый раз взыскивают половину и треть имущества (ну и порядки были в этих городах, как он вообще решил куда-то поехать!), то тем самым его имущество каждый раз уменьшается в 6 раз. Поэтому перед третьим городом у купца было 66 дахеканов, перед вторым — 396, перед первым — 2376.

(***Математика в девяти книгах VI, 27***) *Человек везет рис, проходит через три заставы. На первой заставе берется 3-я часть, на второй заставе 5-я часть, на третьей заставе 7-я часть. Остаток риса составляет 5 доу. Сколько риса было вначале?*

*Решение*. Каждый конечный доу образовался из $(^7/_6)\cdot(^5/_4)\cdot(^3/_2) = 2^3/_{16}$ начальных доу. Но осталось 5 доу; поэтому перед первой заставой было $10^{15}/_{16}$ доу.

### Совместная трапеза, или наполнение бассейнов

(***Книга абака XII***) *Лев съедает овцу за 4 часа, леопард — за 5 часов, медведь — за 6 часов. Если они сидят в одной клетке, и им бросить овцу, за какое время они ее сожрут?*

В нынешней школе обычно считается, что эта задача — на сложение обыкновенных дробей, где каждая дробь представляет прожорливость того или иного зверя. Прожорливость льва составляет $^1/_4$ овцы в час, прожорливость леопарда — $^1/_5$ овцы в час, прожорливость медведя — $^1/_6$ овцы в час. Чтобы найди их совместную прожорливость, надо сложить эти дроби, приведя их знаменатели к наименьшему общему кратному. Однако для устного счета много удобнее с самого начала оперировать с наименьшим общим кратным всех времен, перечисленных в условии задачи. Эта техника — очень мощная и простая; овладеть ей полезно и в наше время.

*Решение*. Найдем такое число, которое делится нацело на 4, 5, 6; пусть это будет 60. Посмотрим, сколько овец все три зверя съедят вместе за 60 часов. Лев съест 15 овец, леопард — 12 овец, и медведь — 10 овец; всего они съедят 15 + 12 + 10 = 37 овец. (Заметьте, что до этого места все подсчеты делались в целых числах, без дробей). Значит, одну овцу они сожрут за $60 : 37 = 1^{23}/_{37}$ часа.

(***Палатинская антология XIV, 130***) *Есть четыре источника, и первый из них заполняет бассейн за день, второй — за два дня, третий — за три, за четыре — четвертый. За сколько — все вместе?*

Решение. Найдем наименьшее общее кратное для 1, 2, 3, 4; это будет 12. Через все четыре трубы за 12 дней заполнится 12 + 6 + 4 + 3 = 25 бассейнов. Значит, один бассейн заполнится за время, в 25 раз меньшее, то есть за $^{12}/_{25}$ дня.

Эту же задачу про бассейны, приписываемую обычно Герону Александрийскому, мы встречаем во множестве других сборников, в том числе и в китайском:

(***Вопросы и ответы 24***) *В городе Афинах был водоем, в который проведены три трубы. Первая могла наполнить водоем за 1 час, вторая — за 2 часа, третья — за 3 часа. Узнай, в какую часть часа все три трубы вместе наполнили водоем.*

(***Математика в 9 книгах VI, 26***) *Имеется водоем с пятью канавами. Через первую водоем наполняется за ⅓ дня, через вторую — за 1 день, через третью — за 2½ дня, через четвертую — за 3 дня, через пятую — за 5 дней. Через сколько дней наполнится водоем, если открыть все канавы?*

А вот еще одна задача, и хотя ее условие внешне совсем не похоже на предыдущие, однако по сути дела она от них не отличается. Решить ее можно с помощью в точности такой же техники. Надо только представить себе, что корабль «пожирает» расстояние, как лев овцу, или «наполняет» его, как труба бассейн.

(***Книга абака XII***) *Два корабля разделены неким расстоянием, и один корабль проходит его за 5 дней, а другой за 7 дней. Если они одновременно поплывут навстречу друг другу, через сколько дней они встретятся?*

Решение. Наименьшее общее кратное для 5, 7 будет 35. За 35 дней первый корабль пройдет 7 расстояний, второй корабль — 5 расстояний; всего они пройдут 5 + 7 = 12 расстояний. Значит, одно расстояние они пройдут за время, в 12 раз меньшее, то есть за 35 : 12 = $3^{11}/_{12}$ дня.

Китайскую версию этой же задачи мы обнаруживаем в трактате «Математика в девяти книгах». Лаконичное решение взято из текста книги.

(***Математика в 9 книгах VI, 20***) *Дикая утка от южного моря до северного летит 7 дней. Дикий гусь от северного моря до южного летит 9 дней. Теперь дикая утка и дикий гусь вылетают одновременно. Через сколько дней они встретятся?*

Решение. Сложи количество дней, это делитель. Количество дней перемножь, это делимое. Объедини делимое и делитель, получишь дни.

### Целое и его части

(***Палатинская антология XIV, 1***) *О Пифагор, отпрыск счастливый Муз геликонских, мне отвечай: сколько учеников в твоем доме мудрость благую изо дня в день постигают? — Я охотно отвечу тебе, Поликрат: из них поло-*

*вина созерцает усердно красоту математики, четверть постигает тайны бессмертной природы, часть седьмая пребывает в молчании, сохраняя учение в сердце. Добавь к ним трех девушек, среди которых — Теано. Столько вестников Пиэрид я веду за собою.*

*Решение*. Число учеников Пифагора делится на 2, 4, 7; значит, оно равно или кратно 28. Допустим, что оно равно 28. Тогда среди учеников математикой занимаются 14 человек, постижением тайн природы — 7 человек, пребывают в молчании 4 человека. Всего получилось 14 + 7 + 4 = 25. Если добавить сюда 3 девушек, получится как раз 28 — решение найдено.

Если бы добавляемых девушек было не 3, а 6, то и общее число учеников было бы в 2 раза больше, и т. п. Примененный способ — это так называемое «правило ложного положения», оно же — «фальшивое правило», *regula falsi*. В Палатинской антологии задач этого типа собрано больше десятка. Решение следующей задачи в уме требует заметных усилий, чтобы удержать в памяти все нужные числа.

(***Палатинская антология XIV, 120***) *Рос орешник, и было на нем много-много орехов. Но подошел к нему человек, и орешник промолвил: «Пятую часть моих орехов взяла Парфенона, четверть взяла Аганиппа, потом Филинна — восьмую часть, потом Орифия — седьмую, потом Евринома с веток моих собрала шестую долю орехов. Трое Харит унесли сто шесть орехов, а девять Муз забрали каждая по девять. Вот и осталось только семь орехов на самой дальней из веток!»* (*пер. М. Гаспарова*)

*Решение*. Начнем с того, что число орехов делилось нацело на 5, 4, 8, 7, 6. Наименьшее число, которое делится на все эти числа, равно 840. Поэтому, число орехов кратно 840. Допустим, что оно равно 840. Найдем, сколько орехов было забрано долями, и сколько их еще оставалось. Парфенона забрала 840 : 5 = 168. Аганиппа взяла 840 : 4 = 210. Филинна взяла 840 : 8 = 105. Орфия взяла 840 : 7 = 120. Наконец, Евринома взяла 840 : 6 = 140. Всего взято 743 ореха. Тогда на все прочие доли остается 840 – 743 = 97 орехов. А по условию должно получиться 106 + 9 · 9 + 7 = 194 ореха, то есть в два раза больше. Значит, и орехов было в два раза больше — не 840, а 1680.

Вот еще несколько задач, решаемых в таком же стиле.

(***Палатинская антология XIV, 126***) *Прах Диофанта гробница покоит, дивись ей, и камень мудрым искусством его скажет усопшего век. Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком, и часть двенадцатую встретил с пушком на щеках. Только минула седьмая, с подругою он обручился, с нею пять лет проведя, сына дождался мудрец. Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил, отнят он был у отца ранней могилой своей.*

*Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе, тут и увидел предел жизни печальной своей.* (*пер. С. Боброва*)

*Решение*. Число лет Диофанта делится на 6, 12, 7, 2; следовательно, оно делится на 84. Надо думать, оно равно 84; проверим это. 6-я, 12-я, 7-я и 2-я доли от 84 вместе дают 14 + 7 + 12 + 42 = 75 лет, осталось еще 9, и это как раз и есть 5 + 2 · 2.

(***Вопросы и ответы 12***) *Хотел я построить лодку, и было у меня всего-навсего каких-то три драма, и больше ничего не было, и я сказал моим ближним: «Дайте мне каждый немного денег, чтобы я построил себе лодку». Один дал мне треть стоимости, и один дал четверть, один шестую, один седьмую и один двадцать восьмую, а я, взяв у них, построил лодку. Итак, узнай, сколько всего драмов стоила лодка.*

*Решение*. Общая стоимость лодки делится на 3, 4, 6, 7, 28; примем ее за 84 единиц. Ближние дали на постройку 28 + 21 + 14 + 12 + 3 = 78 единиц. Оставшиеся 6 единиц составили 3 драма. Поэтому 2 единицы составляют 1 драм, так что лодка стоила 42 драма.

(***Вопросы и ответы 14***) *Было вино, сдобренное розой, в одном карасе, и были три каменных кувшина, и приказал я перелить в них вино; один вместил третью часть вина, другой шестую, а третий — четырнадцатую; а остальное вино перелили в другие сосуды, и составило это пятьдесят четыре паса. Узнай, сколько всего было вина.*

*Решение*. Примем общее количество вина за 42 меры, поскольку 42 делится на 3, 6, 14. Первый кувшин вместил 14 мер, второй — 7 мер, третий — 3 меры, всего 24 меры. Остаток составил 42 – 24 = 18 мер; а по условию это 54 паса. Поэтому каждая мера равна 54 : 18 = 3 пасам. И всего было 42 · 3 = 126 пасов.

Если решать все приведенные выше задачи с помощью сложения обыкновенных дробей, нам придется отказаться от устного счета и приступить к письменным выкладкам. Обыкновенные дроби — это трудная часть элементарной арифметики. Как пишет И. Я. Депман (1950), «Высота уровня математических знаний Анании становится ясной, если указать, что современник его, английский монах Бэда Достопочтенный, который считался в Европе самым ученым человеком своего времени, говорит: “В мире есть много трудных вещей, но нет ничего такого трудного, как четыре действия арифметики”. Анания же решает задачи (например № 21 его задачника), требующие сложения восьми дробей, среди знаменателей которых имеются 7, 8, 9, 13, 14, 16, 20, что приводит к очень большому общему знаменателю». Все это верно — однако без дробей, с помощью наибольшего общего кратного, решение можно произвести если не в уме, то с совсем незначительным объемом простых выкладок.

### Обмен частями

Для следующей задачи из *Палатинской антологии* я приведу свое решение, в основе которого лежит все та же техника нахождения наименьшего общего кратного. Это решение, несмотря на всю сложность задачи, все-таки пригодно для устного рассуждения, удерживающего в памяти все необходимые детали.

**(*Палатинская антология XIV, 146*)** [*Разговаривают две статуи*] *Дай мне две мины, и стану я вдвое тебя тяжелее! — Дай мне столько же ты: тяжелей тебя вчетверо стану.*

*Решение*. Когда одна статуя стала тяжелей другой в 2 раза, весь вес оказался разделен на 3 равных части. Когда вторая статуя стала тяжелей другой в 4 раза, весь вес оказался разделен на 5 равных частей. Значит, весь вес удобно разделить на $3 \cdot 5 = 15$ частей. После первой передачи первая статуя весит 10 частей, а вторая 5 частей. После второй передачи первая статуя весит 3 части, а вторая 12 частей. Переданный вес для каждой статуи составляет 7 частей. Но мы знаем, что передано 2 раза по 2 мины, то есть 4 мины. Значит, 7 частей равны 4 минам, и одна часть весит $^4/_7$ мины. После второй передачи первая статуя весит 3 части, то есть $^{12}/_7 = 1^5/_7$ мины. Значит, исходно она весила $3^5/_7$ мины. После первой передачи вторая статуя весит 5 частей, то есть $^{20}/_7 = 2^6/_7$ мины. Значит, исходно она весила $4^6/_7$ мины.

Задачу такого же типа рассматривает Диофант в первой книге своей *Арифметики*. Решение Диофанта — сугубо алгебраическое, и в памяти его уже не удержишь.

**(*Арифметика I, 15*)** *Найти два таких числа, чтобы каждое из них, взяв от другого заданное число, имело заданное отношение с остатком. Пусть случится так, что 1-е, взяв от 2-го 30, становится в 2 раза больше него, а 2-е, взяв от 1-го 50, становится в 3 раза больше него.*

*Решение*. Возьмем 2-е равным $x + 30$, тогда 1-е будет $2x - 30$, чтобы после получения от 2-го 30 оно стало в 2 раза больше него. Осталось, чтобы 2-е, получив от 1-го 50, стало в 2 раза больше него. Но если 1-е отдает 50, остаток будет $2x - 80$; и 2-е, приняв 50, станет $x + 80$. Осталось, чтобы $x + 80$ было в 3 раза больше $2x - 80$. И вот утроенное меньшее равно большему, откуда $x = 64$. И будет 1-е 98, а 2-е 94. И они решают задачу.

**(*Книга абака XII*)** *У двух людей было некоторое количество денариев. Первый сказал: если ты дашь мне 7 денариев, у меня будет в 5 раз больше денег, чем у тебя. Второй сказал: если ты дашь мне 5 денариев, у меня будет в 7 раз больше денег, чем у тебя. Сколько денариев у них было?*

Первое решение Леонардо, которое я даю в своем пересказе, по существу воспроизводит ту же технику, которую мы применили выше, решая задачу из *Палатинской антологии*.

<u>*Решение 1*</u>. Когда у первого человека в 5 раз больше денег, чем у второго, вся сумма разделена на 6 равных частей. Когда у второго человека в 7 раз больше денег, чем у первого, вся сумма разделена на 8 равных частей. Всю сумму удобно разделить на такое число, которое делится как на 6, так и на 8. Разделим ее на 24 части. После первой передачи у первого человека будет 20 частей, у второго 4 части. После второй передачи у первого человека будет 3 части, у второго 21 часть. Переданная разность составляет 17 частей. Но мы знаем, что передано $7 + 5 = 12$ денариев. Значит, одна часть составляет $^{12}/_{17}$ денария. После первой передачи у второго 4 части, то есть $^{48}/_{17} = 2^{14}/_{17}$ денария. Значит, до этого у него было $9^{14}/_{17}$ денария. После второй передачи у первого 3 части, то есть $^{36}/_{17} = 2^{2}/_{17}$ денария. Значит, до этого у него было $7^{2}/_{17}$ денария.

Леонардо приводит и алгебраическое решение этой задачи, аналогичное тому, которое мы уже видели в *Арифметике* Диофанта. Он называет это решение «прямым», и говорит, что так эту задачу решают арабы.

<u>*Решение 2*</u>. Пусть у второго человека имеется вещь и 7 денариев. Когда он дает 7 денариев первому человеку, у того будет в 5 раз больше, чем останется у второго; значит, у первого будет 5 вещей. Значит, у первого человека исходно имеется 5 вещей без 7 денариев. Когда он дает 5 денариев второму человеку, у него остается 5 вещей без 12 денариев, а у второго будет вещь и 12 денариев. Значит, вещь и 12 денариев в 7 раз больше, чем 5 вещей без 12 денариев. Иначе говоря, вещь и 12 денариев равны 35 вещам без 84 денариев. Отсюда 34 вещи равны 96 денариям. Отсюда вещь равна $2^{14}/_{17}$ денариям. Значит, у второго было $9^{14}/_{17}$ денария, у первого — $7^{2}/_{17}$ денария.

(***Книга абака XII***) *Два человека нашли кошелек, в котором лежало 8 денариев. Первый сказал: если я возьму все монеты из кошелька, у меня будет в 3 раза больше денег, чем у тебя. Второй сказал: если я возьму все монеты из кошелька, у меня будет в 4 раза больше денег, чем у тебя. Сколько денариев у них было?*

<u>*Решение*</u>. В первом положении удобно делить деньги на 4 части, во втором на 5 частей. Значит, всю сумму удобно разделить на 20 частей. В первом положении у первого человека 15 частей, у второго 5 частей. Во втором положении у первого человека 4 части, у второго 16 частей. Значит, в кошельке лежало 11 частей. Одна часть — это $^{8}/_{11}$ денария. У первого человека было $^{32}/_{11} = 2^{10}/_{11}$ денария, у второго человека было $^{40}/_{11} = 3^{7}/_{11}$ денария.

### Покупка лошади

(***Книга абака XII***) *Два человека при деньгах нашли лошадь, которую они хотели бы купить; и первый сказал второму, что если тот даст ему треть своих денег, то это будет цена лошади. На что второй сказал, что если первый даст ему четверть своих денег, это будет цена лошади. Найдите цену лошади и сколько денег было у каждого из них.*

Текст этой задачи, приведенный в статье (Høyrup 1990), сопровожден следующим комментарием: «That this problem is intended for specialists will be obvious. Even in our times, few but those who remember their school algebra will know how to approach it... If you find the solution without hesitation you are really "worth something" within the community of reckoners». Это вызов, и его пришлось принять.

*Решение*. Если оба покупателя сложатся, избыток над ценой лошади будет равен $^2/_3$ наличности второго и $^3/_4$ наличности первого. Значит наличность второго составляет $^3/_2$ от избытка, а наличность первого — $^4/_3$ от избытка. Примем избыток равным 6 единицам. Тогда у первого в кошельке лежит 9 единиц, а у второго — 8 единиц. Вместе 17, отнимаем избыток 6 и находим, что лошадь стоит 11 единиц.

Теперь посмотрим на аналогичную задачу у Диофанта. Эта задача, кроме своей абстрактной формулировки, во всем остальном, включая численные коэффициенты, совпадает с еще одной задачей из *Книги абака*.

(***Арифметика I, 24***) *Найти три таких числа, которые становятся равными после того, как каждое из них получает заданную часть от суммы двух других. Пусть 1-е число получает 3-ю часть от двух остальных объединенных; 2-е от двух остальных объединенных получает 4-ю часть, а 3-е от двух остальных объединенных получает 5-ю часть, и все они становятся равными.*

Начнем с устного решения в нашей технике:

*Решение 1*. Сложив вместе все три числа, получим некоторый избыток над тем, что получается уравниванием. Этот избыток равен $^2/_3$ от B + C, $^3/_4$ от A + C, $^4/_5$ от A + B. Значит B + C вместе составляют $^3/_2$ от избытка, A + C — $^4/_3$ от избытка, A + B — $^5/_4$ от избытка. Пусть избыток равен 24. Тогда B + C = 36, A + C = 32, A + B = 30. Сложив все вместе и поделив пополам, получаем, что A + B + C = 49. Отсюда A = 13, B = 17, C = 19.

Техника Диофанта — алгебраическая:

*Решение 2*. Положим, что первое будет $x$, а два остальных — сколько-то единиц, имеющих для удобства 3-ю часть целой, так как они дают третью часть; пусть это будут 3 единицы. Следовательно, все три вместе будут $x + 3$, а 1-е, получившее от остальных 3-ю часть, будет $x + 1$. Следовательно, нужно будет, чтобы второе, получив от двух остальных объединенных 4-ю часть, было $x + 1$. Учетверим все, тогда учетверенное 2-е вместе с двумя остальными будет равно утроенному 2-му вместе со всеми тремя; следовательно, утроенное 2-е вместе со всеми тремя равно $4x + 4$; значит, если отсюда отниму все три числа, то полученные $3x + 1$ будут равны утроенному 2-му числу; следовательно, само 2-е число равно $x + {}^1/_3$. Теперь нужно, чтобы 3-е число, получив 5-ю часть от объединенных двух остальных, стало $x + 1$. Так же как и выше, упятерим все, и на основании таких же рассуждений получается, что 3-е будет $x + {}^1/_2$. Остается, чтобы сумма всех трех равнялась $x + 3$; $x$ получается равным ${}^{13}/_{12}$; если мы отбросим дроби, то 1-е число будет равно 13, 2-е — 17, 3-е — 19. И они удовлетворяют предложенному.

Меня не оставляет ощущение, что тот, кто придумал эту задачу первым, имел в виду все-таки не такое сложное рассуждение, но простой метод решения с долями и общим кратным. Можно предположить, что Диофанту попал лишь текст задачи, и он его «перемолол» с помощью своей общей техники.

Похожую задачу можно обнаружить и в древнекитайском математическом корпусе.

(***Математика в 9 книгах, VIII 10***) *Если первый человек получит половину того, что у второго, у него будет 50 цяней. Если второй получит «большую половину» (=2/3) того, что у первого, у него тоже будет 50 цяней. Сколько цяней у каждого из них?*

Эту задачу мы вновь легко можем решить в устной технике: у первого человека в наличии имеется утроенный избыток, у второго — удвоенный избыток, следовательно у двоих вместе — упятеренный избыток, который составляет ${}^1/_4$ от 50 цяней. Однако китайский автор предлагает решать задачу с помощью общего метода «фан-чен», в котором производится преобразование числовых таблиц на счетной доске. И опять создается такое впечатление, что задача, исходно предназначенная для устного счета, «перемалывается» с помощью мощной, но сложной техники линейной алгебры.

### На сто рублей купили сто зверей

Вернемся к этой арифметической задаче, уже упомянутой в начале статьи. Все задачи этого типа, известные по разным сборникам, устроены одинаково: в них на $N$ монет покупается $N$ предметов (животных, птиц) трех разных видов, либо $N$ предметов (хлебов, мер зерна) раздаются $N$ людям, распределенным по трем классам. С математической точки зрения, равенство числа монет и числа предметов не является существенным, эти числа могут быть и разными; но оно образует своеобразную «рифму», делающую текст задачи более привлекательным.

Первое по времени сочинение, в котором встречается такая задача — это трактат китайского математика Чжан Цю-цзяня (V в. н. э.). В трактате приводится только ответ, без указания на метод решения, поэтому мы решим задачу о птицах самостоятельно.

***Задача III 38.*** *Петух стоит 5 цяней, курица — 3 цяня, а три цыпленка вместе стоят 1 цянь. Если 100 птиц куплено за 100 цяней, то сколько петухов, куриц и цыплят в их числе?*

<u>Решение</u>. Заметим, что 1 курица и 3 цыпленка стоят 4 монеты. В таком случае за 100 монет можно купить 25 куриц и 75 цыплят. Правда, здесь нет петухов. Заметим теперь, что за 21 монету можно купить как 7 куриц, так и 4 петуха + 3 цыпленка. Производя замену «семь на семь», найдем решения (4, 18, 78), (8, 11, 81), (12, 4, 84).

Следующий по времени блок из восьми сходных задач содержится в сборнике Алкуина (ок. 735 – 804). В трех задачах речь идет о покупке 100 животных; в остальных задачах распределяется 20, 30, 90, 100 мер зерна, а также 12 хлебов — между таким же числом людей трех разных классов. Алкуин в своем сборнике также ограничивается только ответами.

Следующие авторы, в сборниках которых рассматриваются задачи этого типа — это Махавира и Абу Камил. Махавира (IX в.) жил в городе Майсуре на юге Индии. Абу Камил (ок. 850 – ок. 930) — арабский математик, живший в Египте. Он составил короткую *Книгу о птицах*, состоящую из предисловия и шести задач с решениями (Suter 1911). Все шесть задач имеют общий зачин: «На 100 драхм купили 100 птиц». В трех задачах рассматриваются птицы трех видов, в двух — птицы четырех видов, и еще в одной — пяти видов. Когда число видов больше трех, число целочисленных решений системы сильно увеличивается; в последней задаче оно равно 2976. Абу Камил детально обсуждает алгебраическую технику решений таких задач. Мы рассмотрим ее на примере пятой задачи, интересной тем, что она не имеет целочисленных положительных решений.

***Задача 5.*** *На 100 драхм купили 100 птиц. Утку купили за 3 драхмы, 3 курицы за 1 драхму и 20 воробьев за 1 драхму. Сколько уток, куриц и воробьев было куплено?*

<u>Решение</u>. Пусть куплено $x$ уток за $3x$ драхм, $y$ воробьев за $\frac{1}{20}y$ драхм. Тогда куплено $100-x-y$ кур за $100-3x-\frac{1}{20}y$ драхм. На 1 драхму куплены 3 курицы, поэтому число кур равно $300-9x-\frac{3}{20}y$. Приравнивая два выражения для числа кур, получаем уравнение $8x=200-\frac{17}{20}y$. Отсюда

$x = 25 - \frac{17}{160}y$. Чтобы $x$ было целым, $y$ должно делиться на 160. Но $y$ больше 0 и меньше 100 — решения нет.

Более поздние математические сочинения, в которых приводились аналогичные задачи и обсуждались методы их решения, мы рассматривать не будем; заинтересованный читатель может навести справки в книге Dickson 1920.

Числовые данные в условиях задач у всех названных выше авторов различны. По числам одна задача у Абу Камила совпадает с одной из задач Алкуина, но антураж поменялся: у Алкуина речь шла о покупке верблюдов, ослов и овец, а у Абу Камила — о покупке уток, петухов и воробьев. И все же общность «задачной оболочки» во всех этих задачах является несомненной. Формулировка «на 100 монет купили 100 животных» с ее числовой рифмой в условии вряд ли могла быть придумана независимо двумя разными людьми — это как стихи, здесь повтор невозможен. И мы должны сказать, что эта задача была придумана единожды и в одном месте, а в остальные места она была передана по цепочке традиции.

## Литература


Березкина Э. И. (1957) «Древнекитайский трактат “Математика в девяти книгах”», *Историко-математические исследования* 10, 422–586.

Березкина Э. И. (1969) «О трактате Чжан Цю-цзяня по математике», *Физико-математические науки в странах Востока* 2 (5), 18–81.

Березкина Э. И. (1980) *Математика Древнего Китая*. М.: Наука.

Гаспаров М. Л. (1995) *Занимательная Греция: Рассказы о древнегреческой культуре*. М.: Новое литературное обозрение.

Депман И. Я. (1950) *Математика у народов нашей родины*. М.: Детгиз.

Депман И. Я. (1965) *История арифметики*. М.: Просвещение.

Диофант Александрийский (1974) *Арифметика и Книга о многоугольных числах*. Пер. И. Н. Веселовского, ред. и комм. И. Г. Башмаковой. М.: Наука.

Кобзев А. И., Еремеев В. Е. (2009) «Чжан Цю-цзянь суань цзин», в кн.: *Духовная культура Китая. Т. 5. Наука, техническая и военная мысль, здравоохранение и образование*. М.: Вост. лит., 933–934.

Орбели И. А. (1918) *Вопросы и решения вардапета Анания Ширакца, армянского математика VII века*. Пг.: Академия наук.

Ascher M. (1990) “A river-crossing problem in cross-cultural perspective,” *Mathematics Magazine* 63, 26–29.

Dickson L. E. (1920) *History of the theory of numbers. Vol. 2: Diophantine analysis*. NY: Chelsea Publishing.

Hadley J., Singmaster D. (1992) “Problems to sharpen the young,” *Mathematical Gazette* 76, 102–126.

Hannah J. (2011) “Conventions for recreational problems in Fibonacci’s «Liber Abbaci»,” *Archive for History of Exact Sciences* 65, 155–180.

Heath T. L. (1910) *Diophantus of Alexandria: A study in the history of Greek algebra*. Cambridge UP.

Høyrup J. (1990) "Sub-scientific mathematics: undercurrents and missing links in the mathematical technology of the Hellenistic and Roman world," *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter.* 3. Række: *Preprints og Reprints* nr. 3.

Rangācārya M. (1912) *The Ganita-sāra-sangraha of Mahāvīrācārya.* Madras: Government Press.

Shen Kangshen, Krossley J. N., Lun A. W.-C. (1999) *The nine chapters of the mathematical art: companion & commentary*. Oxford UP.

Sigler L. E. (2002) *Fibonacci's Liber Abaci*. NY: Springer.

Suter H. (1911) "Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abū Kāmil el-Miṣrī", *Bibliotheca Mathematica* 3, 11, 100–120.